参考答案及解析

一、选择题

1.B 2.D 3.A 4.D 5.D 6.B 7.C 8.A 9.B 10.C 11.B 12.D

二、填空题

13.-1 14.$(1,+\infty)$ 15.$\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$ 16.$\frac{\sqrt{3}}{4}$

三、解答题

17.**解**:(1)由题意得 $f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

则 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$. (5分)

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,

故当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 3;

当 $x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

因为不等式 $|f(x)-m|<3$ 恒成立,

所以 $m-3<f(x)<m+3$,

所以 $3<m+3$ 且 $-\frac{3}{2}>m-3$,解得 $0<m<\frac{3}{2}$,

即实数 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$. (10分)

18.(1)**证明**:由 $\sin A\sin B+\sin^2 A=\sin^2 C$ 及正弦定理,得 $ab+a^2=c^2$,即 $c^2-a^2=ab$,

则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+ab}{2bc}=\frac{b+a}{2c}=\frac{\sin B+\sin A}{2\sin C}$,

则 $\frac{\sin C}{2\cos A}=\frac{\sin^2 C}{\sin B+\sin A}=\frac{\frac{c^2}{(2R)^2}}{\frac{b}{2R}+\frac{a}{2R}}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{c^2}{b+a}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{ab+a^2}{b+a}=\frac{a}{2R}=\sin A$,其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,

即证得 $\frac{\sin C}{2\cos A}=\sin A$. (6分)

(2)**解**:由题意得 $\frac{1}{2}bc\sin A=b^2\sin^2 A$,

所以 $\sin A=\frac{c}{2b}=\frac{\sin C}{2\sin B}$.

又 $\cos A=\frac{\sin C}{2\sin A}$,

所以 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sin B}$,所以 $\cos A=\sin B$.

又 B 为钝角,所以 $B=\frac{\pi}{2}+A$,

又 $A+B+C=\pi$,所以 $A+\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+C=\pi$,

解得 $C=\frac{\pi}{2}-2A$,

所以 $\frac{\sin C}{2\cos A}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)}{2\cos A}=\frac{\cos 2A}{2\cos A}=\sin A$,

所以 $\cos 2A=\sin 2A$,所以 $\tan 2A=1$.

又 A 为锐角,所以 $2A\in(0,\pi)$,

所以 $2A=\frac{\pi}{4}$,所以 $A=\frac{\pi}{8}$. (12分)

19.(1)**证明**:当 $a=1$ 时,$f(x)=\sin x-x\cos x$,

则 $f'(x)=x\sin x$,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$. (5分)

(2)**解**:因为 $f(x)=a\sin x-x\cos x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $f'(x)=(a-1)\cos x+x\sin x$.

①当 $a=1$ 时,由(1)知 $f(x)\geqslant 0$ 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立.

②当 $a>1$ 时,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $f'(x)>0$,因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$ 对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立.

③当 $a<1$ 时,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=(2-a)\sin x+x\cos x$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立,因此 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.

又 $g(0)=a-1<0$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$,

所以存在唯一的 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,使得 $g(x_0)=0$,即 $f'(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内单调递减,

所以 $f(x)<f(0)=0$,不符合题意.

综上可知 $a\geqslant 1$,即实数 a 的最小值为 1. (12分)

20.**解**:(1)由 $4a\cos A=c\cos B+b\cos C$ 及正弦定理得 $4\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$,

所以 $\cos A=\frac{1}{4}$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=b^2+c^2-\frac{1}{2}bc=16$，①

又$\triangle ABC$的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$，所以 $bc=8$. ②

由①②得 $b=4,c=2$ 或 $b=2,c=4$.　（6 分）

(2)由 $\sin B=k\sin C(k>0)$，得 $b=kc$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=(kc)^2+c^2-2kc\cdot c\cdot\frac{1}{4}=\left(k^2-\frac{1}{2}k+1\right)c^2$.

若 B 为钝角，则 $a^2+c^2<b^2$，即 $\left(k^2-\frac{1}{2}k+1\right)+1<k^2$，解得 $k>4$；

若 C 为钝角，则 $a^2+b^2<c^2$，即 $\left(k^2-\frac{1}{2}k+1\right)+k^2<1$，解得 $0<k<\frac{1}{4}$.

综上，实数 k 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup(4,+\infty)$.

（12 分）

21.(1)**解**：由题意得 $f'(x)=2e^{2x}-2ax^2\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恒成立，即 $a\leqslant\frac{e^{2x}}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恒成立.

令 $g(x)=\frac{e^{2x}}{x}$，则 $g'(x)=\frac{2xe^{2x}-e^{2x}}{x^2}=\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内单调递减；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调递增，故 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=2e$，

所以 $a\leqslant 2e$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,2e]$.　（4 分）

(2)**证明**：由(1)知当 $a\leqslant 2e$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增，则不存在极大值.

当 $a>2e$ 时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，$\ln a>\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$.

$f'(x)=2e^{2x}-2ax$，令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=4e^{2x}-2a$.

令 $h'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$.

则易知函数 $f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty\right)$ 内单调递增.

又 $f'(0)=2>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2e-a<0$，

$f'(\ln a)=2e^{2\ln a}-2a\ln a=2a(a-\ln a)>0$（易证明 $a-\ln a>0$），故存在 $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $f'(x_1)=2e^{2x_1}-2ax_1=0$，

存在 $x_2\in\left(\frac{1}{2},\ln a\right)$，使得 $f'(x_2)=0$，

则当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 内单调递增，在区间 (x_1,x_2) 内单调递减，在区间 $(x_2,+\infty)$ 内单调递增，

所以当 $x=x_1$ 时，$f(x)$ 取得极大值，即 $M=e^{2x_1}-ax_1^2$.

由 $0<x_1<\frac{1}{2}$，得 $1-x_1>0$，$x_1\neq 1-x_1$，

由 $2e^{2x_1}-2ax_1=0$，得 $e^{2x_1}=ax_1$，

故 $M=e^{2x_1}-ax_1^2=ax_1-ax_1^2=ax_1(1-x_1)<a\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2=\frac{a}{4}$，所以 $M<\frac{a}{4}$.　（12 分）

22.**证明**：(1)由题得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}$，设 $f(x)$ 的图像与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，则 $\begin{cases}f(x_0)=0,\\f'(x_0)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a(\ln x_0-1)+\frac{1}{x_0}=0,\\\frac{a}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}=0,\end{cases}$ 解得 $a=x_0=1$，

所以 $f(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$，则 $f(x)\leqslant\frac{(x-1)^2}{x}$ 即为 $\ln x\leqslant x-1$. 设 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，

所以 $f(x)\leqslant\frac{(x-1)^2}{x}$.　（5 分）

(2)先证 $g(x)>0$，设 $\varphi(x)=\frac{x-1}{\ln x}(x>1)$，

则 $\varphi'(x)=\frac{\ln x+\frac{1}{x}-1}{(\ln x)^2}$，

由(1)可知，当 $x>1$ 时，$\ln x+\frac{1}{x}-1>0$，从而有 $\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递增.

又 $1<x^2<b$，从而有 $\varphi(x^2)<\varphi(b)$，即 $\frac{x^2-1}{\ln x^2}<\frac{b-1}{\ln b}$，

所以 $\frac{x^2-1}{2}<\frac{(b-1)\ln x}{\ln b}=(b-1)\log_b x$，即 $g(x)>0$.

（8 分）

再证 $g(x)<\frac{(b-1)^2}{2}$，因为 $g(x)=(b-1)\log_b x-\frac{x^2-1}{2}=\frac{(b-1)\ln x}{\ln b}-\frac{x^2-1}{2}=(b-1)\cdot\frac{\ln x^2}{2\ln b}-\frac{x^2-1}{2}<(b-1)\cdot\frac{x^2-1}{2\ln b}-\frac{x^2-1}{2}=\frac{x^2-1}{2}\cdot\left(\frac{b-1}{\ln b}-1\right)$，

又 $\ln b>1-\frac{1}{b}$，所以 $\frac{b-1}{\ln b}<b$，

又 $1<x^2<b$，所以 $g(x)<\frac{(x^2-1)(b-1)}{2}<\frac{(b-1)^2}{2}$.

综上可知，$0<g(x)<\frac{(b-1)^2}{2}$.　（12 分）