

## 高三数学

2023.04

本试卷共 6 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ , 则  $A \cap B =$

- (A)  $\{1\}$  (B)  $\{0, 1\}$  (C)  $\{-1, 0, 1\}$  (D)  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 若复数  $z = i(i - 1)$ , 则  $|z - 1| =$

- (A)  $-2 - i$  (B)  $-i$  (C)  $\sqrt{5}$  (D) 5

3. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n = n^2 - 1$ , 则  $a_3 =$

- (A)  $-5$  (B) 5 (C) 7 (D) 8

4. 若某圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形, 则它的体积为

- (A)  $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$  (B)  $\frac{2\pi}{3}$  (C)  $\sqrt{3}\pi$  (D)  $2\pi$

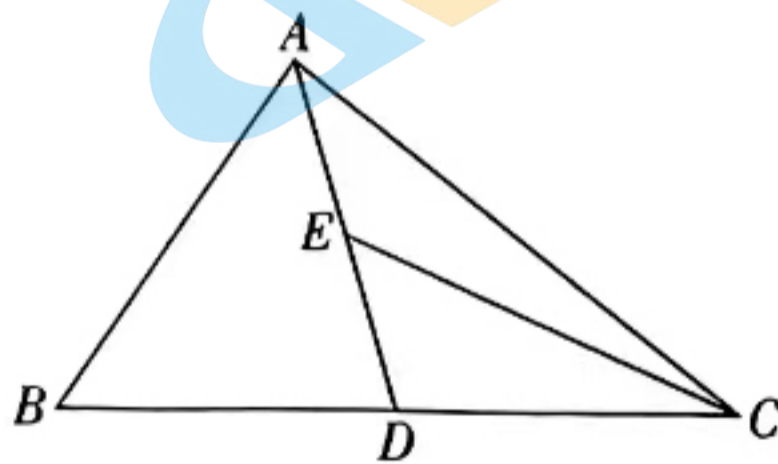
5. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  为  $BC$  边上的中线, 若  $E$  为  $AD$  的中点, 则  $\vec{CE} =$

(A)  $-\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{5}{4}\vec{AC}$

(B)  $-\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$

(C)  $\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{5}{4}\vec{AC}$

(D)  $\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$



6. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ , 若双曲线  $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$  的一条渐近线与圆  $C$  相切,

则  $m =$

(A)  $\frac{1}{8}$

(B)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(C)  $2\sqrt{2}$

(D) 8

7. 为了得到函数  $y = \log_2(2x - 2)$  的图象, 只需把函数  $y = \log_2 x$  的图象上的所有点

- (A) 向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度
- (B) 向右平移 2 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度
- (C) 向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- (D) 向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

8. 已知  $A, B$  是  $\triangle ABC$  的内角, “ $\triangle ABC$  为锐角三角形”是“ $\sin A > \cos B$ ”的

- (A) 充分而不必要条件
- (B) 必要而不充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x + 1}$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数, 则下列结论正确的是

- (A)  $f(-x) - f(x) = 0$
- (B)  $f'(x) < 0$
- (C) 若  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $x_1 f(x_2) > x_2 f(x_1)$
- (D) 若  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) + f(x_2) > f(x_1 + x_2)$

10. 已知  $A, B, C$  是单位圆上的三个动点, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  的最小值是

- (A) 0
- (B)  $-\frac{1}{2}$
- (C) -1
- (D) -2

## 第二部分 (非选择题 110 分)

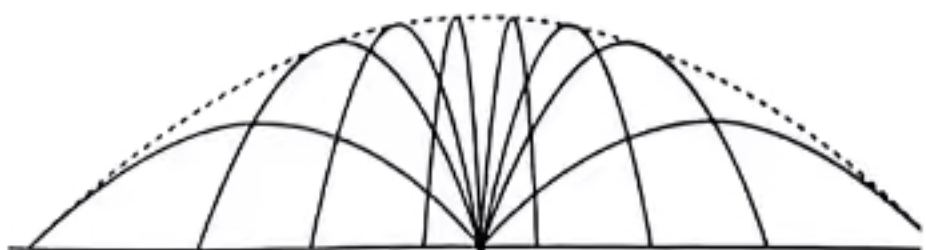
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 在  $(2x + 1)^4$  的展开式中,  $x^2$  的系数为 \_\_\_\_\_。(用数字作答)

12. 已知点  $P(0, 2)$ , 直线  $l: x + 2y - 1 = 0$ , 则过点  $P$  且与直线  $l$  相交的一条直线的方程是 \_\_\_\_\_

13. 若函数  $f(x) = \sin x - \cos 2x$ , 则  $f(\frac{\pi}{6}) =$  \_\_\_\_\_;  $f(x)$  的值域为 \_\_\_\_\_.

14. 在水平地面竖直定向爆破时, 在爆破点炸开的每块碎片的运动轨迹均可近似看作是抛物线的一部分. 这些碎片能达到的区域的边界和该区域轴截面的交线是抛物线的一部分 (如图中虚线所示), 称该条抛物线为安全抛物线. 若某次定向爆破中碎片达到的最大高度为 40 米, 碎片距离爆炸中心的最远水平



距离为 80 米, 则这次爆破中, 安全抛物线的焦点到其准线的距离为 \_\_\_\_\_ 米.

15. 已知函数  $f(x) = |\cos 2x| + 1$ . 给出下列四个结论:

①  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ ;

②  $f(x)$  的一条对称轴方程为  $x = \frac{\pi}{4}$ ;

③ 若函数  $g(x) = f(x) + b$  ( $b \in \mathbf{R}$ ) 在区间  $[0, \frac{9\pi}{8}]$  上有 5 个零点, 从小到大依次记为

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , 则  $x_1 + 2(x_2 + x_3 + x_4) + x_5 = 5\pi$ ;

④ 存在实数  $a$ , 使得对任意  $m \in \mathbf{R}$ , 都存在  $x_1, x_2 \in [-\frac{\pi}{6}, 0]$  且  $x_1 \neq x_2$ , 满足

$$af(x_k) = f(m) + \frac{1}{f(m)} \quad (k=1, 2).$$

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

在四边形  $ABCD$  中,  $AB = 1, CD = DA = 2, BC = 3$ , 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 解决下列问题.

(I) 求  $BD$  的长;

(II) 求四边形  $ABCD$  的面积.

条件①:  $\cos \angle DBC = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;

条件②:  $\angle DCB + \angle DAB = \pi$ .

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

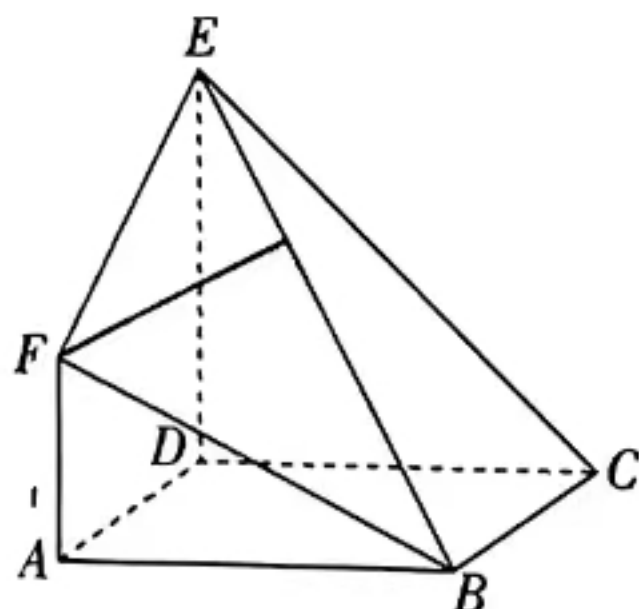
(本小题 14 分)

如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 面  $ABCD$  是正方形,  $DE \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $ABF \parallel$  平面  $CDE$ ,  $A, D, E, F$  四点共面,  $AB = DE = 2, AF = 1$ .

I) 求证:  $AF \parallel DE$ ;

II) 求点  $F$  到平面  $BCE$  的距离;

III) 过点  $F$  与  $CE$  垂直的平面交直线  $BE$  于点  $P$ , 求  $EP$  的长度.



## 18. (本小题 14 分)

某地区教育研究部门为了解当前本地区中小学教师在教育教学中运用人工智能的态度、经验、困难等情况,从该地区 2000 名中小学教师中随机抽取 100 名进行了访谈.在整理访谈结果的过程中,统计他们对“人工智能助力教学”作用的认识,得到的部分数据如下表所示:

| 类别 |                | 人数 | 观点   |       |      | 合计 |
|----|----------------|----|------|-------|------|----|
|    |                |    | 没有帮助 | 有一些帮助 | 很有帮助 |    |
| 性别 | 男              |    | 2    | 10    |      | 20 |
|    | 女              |    |      | 35    | 40   | 80 |
| 年龄 | 40 岁以下(含 40 岁) |    | 1    |       | 35   |    |
|    | 40 岁以上         |    | 6    | 26    |      | 45 |

假设用频率估计概率,且每位教师对“人工智能助力教学”作用的认识相互独立.

- (I) 估计该地区中小学教师中认为人工智能对于教学“没有帮助”的人数;
- (II) 现按性别进行分层抽样,从该地区抽取了 5 名教师,求这 5 名教师中恰有 1 人认为人工智能对于教学“很有帮助”的概率;
- (III) 对受访教师关于“人工智能助力教学”的观点进行赋分:“没有帮助”记 0 分,“有一些帮助”记 2 分,“很有帮助”记 4 分. 统计受访教师的得分,将这 100 名教师得分的平均值记为  $\mu_0$ ,其中年龄在 40 岁以下(含 40 岁)教师得分的平均值记为  $\mu_1$ ,年龄在 40 岁以上教师得分的平均值记为  $\mu_2$ ,请直接写出  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  的大小关系.(结论不要证明)

19. (本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过两点  $A(-2, 0), B(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程和离心率;

(II) 设  $P, Q$  为椭圆  $C$  上不同的两个点, 直线  $AP$  与  $y$  轴交于点  $E$ , 直线  $AQ$  与  $y$  轴交于点  $F$ , 若点  $M(1, 0)$  满足  $MF \perp ME$ , 求证:  $P, O, Q$  三点共线.

20. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = (\sqrt{x} + a)e^x (a \in \mathbf{R})$ .

(I) 当  $a = 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若  $f(x)$  是增函数, 求  $a$  的取值范围;

(III) 证明:  $f(x)$  有最小值, 且最小值小于  $f(1)$ .

1. (本小题 14 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q (q \neq 1)$ , 其所有项构成集合  $A$ , 等差数列  $\{b_n\}$  的公差为  $d (d \neq 0)$ , 其所有项构成集合  $B$ . 令  $C = A \cup B$ , 集合  $C$  中的所有元素按从小到大排列构成首项为 1 的数列  $\{c_n\}$ .

(I) 若集合  $C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ , 写出一组符合题意的数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ ;

(II) 若  $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 数列  $\{b_n\}$  为无穷数列,  $A \cap B = \emptyset$ , 且数列  $\{c_n\}$  的前 5 项成公比为  $p$  的等比数列. 当  $b_1 < a_5$  时, 求  $p$  的值;

(III) 若数列  $\{b_n\}$  是首项为 1 的无穷数列, 求证: “存在无穷数列  $\{a_n\}$ , 使  $A \subseteq B$ ” 的充要条件是 “ $d$  是有理数”.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯