

第 19 届 CGMO 试题解答

瞿振华

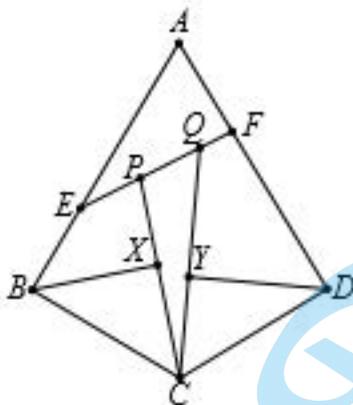
(华东师范大学, 200241)

北京高考在线
www.gkzox.com

第 19 届中国女子数学奥林匹克 (CGMO) 于 2020 年 8 月 8 日至 11 日在江西省鹰潭一中举行. 下面介绍本次考试试题及解答.

I. 试题

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $CB = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 E, F 分别在线段 AB, AD 上, 点 P, Q 在线段 EF 上 (P 在 E, Q 之间), 满足 $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$. 点 X, Y 分别在线段 CP, CQ 上, 满足 $BX \perp CP$, $DY \perp CQ$. 证明: X, P, Q, Y 四点共圆. (华东师范大学 何忆捷 供题)



北京高考在线
www.gkzox.com

2. 给定整数 $n \geq 2$, 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是任意实数, 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2]$$

的最大值, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

(南方科技大学 付云峰 供题)

3. 设有三个班级, 每班恰有 n 名同学, 这 $3n$ 名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成 n 组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高
- 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

的同学称为“高个子”。已知无论如何分组，每班都至少有 10 名同学是“高个子”。证明： n 的最小可能值是 40. (南方科技大学 付云峰 供题)

4. 设 p, q 是两个不同的素数, $p > q$. 证明: $p! - 1$ 与 $q! - 1$ 的最大公约数不超过 $p^{\frac{q}{2}}$. (复旦大学 程力 供题)

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{c_n\}_{n \geq 1}$:

(i) 对任意正整数 $n, b_n \leq c_n$;

(ii) 对任意正整数 n, b_{n+1} 与 c_{n+1} 是一元二次方程 $x^2 + b_n x + c_n = 0$ 的两根.

(华东师范大学 廖拯 供题)

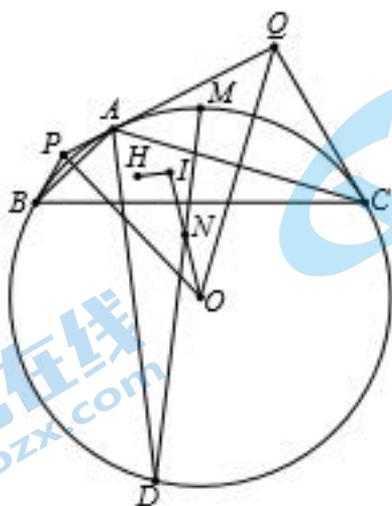
6. 设 p, q 均是大于 1 的整数, 且 p 与 $6q$ 互素. 证明:

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2 \equiv 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q} \right] \pmod{q-1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

(南京师范大学 纪春岗 供题)

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC, \angle BAC = 120^\circ$, 外接圆 $\odot O$ 在点 A, B 处的切线相交于点 P , 在点 A, C 处的切线相交于点 Q . 设 H 和 I 分别是 $\triangle POQ$ 的垂心和内心, M 是弧 \widehat{BAC} 的中点, N 是线段 OI 的中点, D 是直线 MN 与 $\odot O$ 的另一个交点. 证明: $IH \perp AD$. (华东师范大学 林天齐 供题)

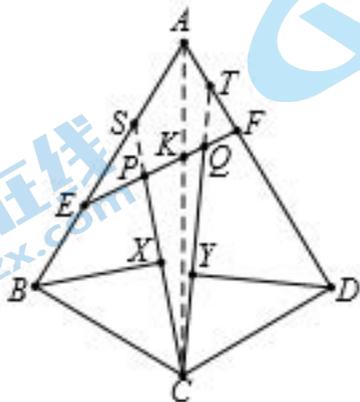


8. 给定正整数 n . 一个有限项正整数列 (a_1, \dots, a_m) 称为“ n -偶数列”: 若 $n = a_1 + \dots + a_m$, 且共有偶数个整数对 (i, j) 满足 $1 \leq i < j \leq m$ 而 $a_i > a_j$. 求 n -偶数列的个数.

例如, 共有六个 4-偶数列: (4)、(1,3)、(2,2)、(1,1,2)、(2,1,1)、(1,1,1,1).

II. 解答

1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $CB = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 E, F 分别在线段 AB, AD 上, 点 P, Q 在线段 EF 上 (P 在 E, Q 之间), 满足 $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$. 点 X, Y 分别在线段 CP, CQ 上, 满足 $BX \perp CP, DY \perp CQ$. 证明: X, P, Q, Y 四点共圆.



证明. 由条件知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 关于 AC 对称, 且

$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ.$$

设 AC 与 EF 交于点 K , 由 AK 平分 $\angle EAF$ 得 $\frac{AE}{AF} = \frac{KE}{KF}$, 又 $\frac{AE}{AF} = \frac{EP}{FQ}$,

所以 $\frac{KE}{KF} = \frac{EP}{FQ}$, 即 $\frac{KE}{EP} = \frac{KF}{FQ}$.

延长 CP 交 AE 于点 S , 延长 CQ 交 AF 于点 T . 对 $\triangle KPC$ 与截线 ESA 运用梅涅劳斯定理, 得

$$\frac{KE}{EP} \cdot \frac{PS}{SC} \cdot \frac{CA}{AK} = 1.$$

同理得

$$\frac{KF}{FQ} \cdot \frac{QT}{TC} \cdot \frac{CA}{AK} = 1.$$

于是

$$\frac{CS}{PS} = \frac{KE}{EP} \cdot \frac{CA}{AK} = \frac{KF}{FQ} \cdot \frac{CA}{AK} = \frac{CT}{QT},$$

故 $\frac{CS}{CP} = \frac{CT}{CQ}$, 即 $\frac{CP}{CQ} = \frac{CS}{CT}$.

注意到 $BX \perp CP, DY \perp CQ$ 及 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 得

$$\frac{CX \cdot CP}{CY \cdot CQ} = \frac{CX \cdot CS}{CY \cdot CT} = \frac{CB^2}{CD^2} = 1,$$

2. 给定整数 $n \geq 2$, 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是任意实数, 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2]$$

的最大值, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

解. 注意到 $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2])$.

因为

$$2[x_i x_j] \leq 2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2 < [x_i^2] + [x_j^2] + 2,$$

且上式最左边和最右边都是整数, 故

$$2[x_i x_j] \leq [x_i^2] + [x_j^2] + 1.$$

等号必须在 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性不同时才可能成立 (因为左边是偶数). 因此, 当 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性不同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 1;$$

当 $[x_i^2]$ 和 $[x_j^2]$ 奇偶性相同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 0.$$

设 $[x_1^2], [x_2^2], \dots, [x_n^2]$ 中有 k 个奇数, $n-k$ 个偶数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]) \leq k(n-k) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

另一方面, 设 $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 如果

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1.4, x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 1.5,$$

那么当 $1 \leq i < j \leq m$ 或 $m+1 \leq i < j \leq n$ 时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 0;$$

而当 $1 \leq i \leq m$ 且 $m+1 \leq j \leq n$ 时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 1.$$

此时

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]) = m(n-m) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

综上所述, 所求的最大值为 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

□

3. 设有三个班级, 每班恰有 n 名同学, 这 $3n$ 名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成 n 组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高的同学称为“高个子”. 已知无论如何分组, 每班都至少有 10 名同学是“高个子”. 证明: n 的最小可能值是 40.

证法一. 首先对 $n = 40$ 给出一种构造. 设三个班分别为 A 班, B 班和 C 班. 所有学生由高到低分别为 $1, 2, \dots, 120$ 号, 其中 $1, 2, \dots, 10$ 号和 $71, 72, \dots, 100$ 号在 A 班; $11, 12, \dots, 30$ 号和 $101, 102, \dots, 120$ 号在 B 班; $31, 32, \dots, 70$ 号在 C 班.

从而 A 班的 $1, 2, \dots, 10$ 号必然是“高个子”; B 班的 $11, 12, \dots, 30$ 号中最多有 10 名同学与 $1, 2, \dots, 10$ 号之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”; C 班的 $31, 32, \dots, 70$ 号中最多有 30 名同学与 $1, 2, \dots, 30$ 号至少之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”. 因此这个构造满足题目要求.

下面证明 40 是最小的. 将 $3n$ 名同学按身高由高到低顺次编号为 $1, 2, \dots, 3n$, 我们先证明一个引理.

引理. 设三个班的学生满足题目中的条件, 则对于每个班, 都存在一个 k , 使得编号为 $1, 2, \dots, k$ 的学生中, 该班所占的人数比其它两个班所占的人数之和至少多 10 人.

引理的证明. 考虑一个班 (不妨设为 A 班), 设该班的所有同学的编号由小到大排列为 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 其余两个班的所有同学编号由小到大排列为 $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$.

对 $1 \leq i \leq n-9$, 将编号为 a_{i+9} 的 A 班同学和编号为 x_i 的 B 或 C 班同学分为一组, 然后将有 A 班和 C 班同学的组中添入一个未被分组的 B 班同学, 将有 A 班和 B 班同学的组中添入一个未被分组的 C 班同学, 剩下同学按照每组 A, B, C 班各一人分组, 此时除编号为 a_1, a_2, \dots, a_9 的同学外, A 班还至少有一名同学是“高个子”, 设其编号为 a_m , 那么 $a_m < x_{m-9}$, 这说明在编号为 $1, 2, \dots, a_m$ 的同学中, A 班有 m 人, B, C 两班加在一起最多 $m-10$ 人, 因此引理得证.

回到原问题, 设 A, B, C 班对应的引理中的 k 分别为 k_1, k_2, k_3 , 且不妨设 $k_1 \leq k_2 \leq k_3$, 那么在 $1, 2, \dots, k_1$ 号中, A 班至少有 10 人; 在 $1, 2, \dots, k_2$ 号中, B 班至少有 $10+10=20$ 人; 在 $1, 2, \dots, k_3$ 号中, C 班至少有 $10+20+10=40$ 人.

因此 40 是最小可能值. □

证法二. 对学生的编号和构造同证法一, 下面仅证明 40 是最小的, 即证明 $n < 40$ 时不可能满足题目中的条件.

假设可以满足条件, 由于每个班都至少有 10 名高个子, 故 $n \geq 30$. 考虑 $a_{n-19}, b_{n-19}, c_{n-19}$, 不妨设 a_{n-19} 是三个数中最小的, 故编号为 $a_1, a_2, \dots, a_{n-19}$ 的学生都高于编号为 $b_{20}, b_{21}, \dots, b_n, c_{20}, c_{21}, \dots, c_n$ 的学生.

现在对 $1 \leq i \leq n-19$, 将 a_i, b_{i+1}, c_{i+19} 分为一组, 这些组中的高个子都是 A 班的, 剩下的学生按照每班一人分组, 则 B, C 班一共不超过 19 名高个子, 矛盾! 因此 40 是最小可能值. \square

4. 设 p, q 是两个不同的素数, $p > q$. 证明: $p! - 1$ 与 $q! - 1$ 的最大公约数不超过 $p^{\frac{3}{5}}$.

证明. 记 $D = \gcd(p! - 1, q! - 1)$. 易验证 $2! - 1, 3! - 1, 5! - 1, 7! - 1$ 两两互素, 故 $p \leq 7$ 时命题成立.

以下设 $p \geq 11$. 注意到 $p! - q!$ 被 D 整除, 而 $q!$ 与 D 互素, 故 D 整除 $\frac{p!}{q!} - 1$. 于是 $D \leq \frac{p!}{q!} \leq p^{p-q}$. 如果 $q \geq \frac{2}{3}p$, 则前式推出 $D \leq p^{\frac{3}{5}}$, 已得证. 故以下设 $p > \frac{3}{2}q$.

注意到 $D \mid (p! - q!^2)$, 并且 $p! - q!^2 \neq 0$ (因为 $p! - q!^2$ 不被素数 p 整除).

如果 $p > 2q$, 则 $p!$ 与 $q!^2$ 有公因子 $q!^2$, 它与 D 互素, 从而 D 整除 $\frac{p! - q!^2}{q!^2} = \frac{p!}{q!^2} - 1$, 这推出 $D \leq \frac{p!}{q!^2}$. 又 $D \mid (q! - 1)$ 推出 $D \leq q!$, 于是

$$D \cdot D^2 \leq \frac{p!}{q!^2} \cdot q!^2 = p! \leq p^p,$$

故 $D \leq p^{\frac{3}{5}}$, 命题得证.

剩下的情况是 $\frac{3}{2}q < p \leq 2q$, 此时 $p!$ 与 $q!^2$ 有公因子 $q!(p-q)!$, 它与 D 互素, 故 D 整除 $\frac{p! - q!^2}{q!(p-q)!} \neq 0$, 这推出

$$D \leq \left| \frac{p!}{q!(p-q)!} - \frac{q!}{(p-q)!} \right| \leq \max \left\{ \frac{p!}{q!(p-q)!}, \frac{q!}{(p-q)!} \right\}.$$

由于

$$\frac{p!}{q!(p-q)!} \leq 2^p \leq 11^{\frac{3}{5}} \leq p^{\frac{3}{5}},$$

而 $\frac{q!}{(p-q)!}$ 可以写成 $2q - p$ 个不超过 p 的连续正整数的乘积, 故

$$\frac{q!}{(p-q)!} \leq p^{2q-p} \leq p^{\frac{3}{5}},$$

其中最后一个不等式是因为 $\frac{3}{2}q < p$. 于是 $D \leq p^{\frac{2}{3}}$, 得证. \square

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{c_n\}_{n \geq 1}$:

(i) 对任意正整数 n , $b_n \leq c_n$;

(ii) 对任意正整数 n , b_{n+1} 与 c_{n+1} 是一元二次方程 $x^2 + b_n x + c_n = 0$ 的两根.

解. 由条件(i),(ii)可知, b_{n+1} 与 c_{n+1} 由 b_n, c_n 唯一确定, 且由韦达定理, 有

$$b_n = -(b_{n+1} + c_{n+1}), \quad (1)$$

$$c_n = b_{n+1}c_{n+1}. \quad (2)$$

若 $b_1 = c_1 = 0$, 易知对所有 $n \geq 1$, 均有 $b_n = c_n = 0$, 我们得到满足题目条件的序列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{c_n\}_{n \geq 1}$, 对任意正整数 n , $b_n = c_n = 0$.

下面证明其他序列均不满足条件.

假设 b_1, c_1 中恰有一个为零. 若 $b_1 = 0$, 则 $c_1 > 0$, 方程 $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ 无实根, 不满足条件. 若 $c_1 = 0$, 则 $b_1 < 0$, 方程 $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ 的两根为 $b_2 = 0$, $c_2 = -b_1 > 0$, 方程 $x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ 无实根, 不满足条件.

假设 b_1, c_1 均不为零. 若 $b_n > 0, c_n > 0$, 则由等式(1),(2)可知 $b_{n+1} < 0, c_{n+1} < 0$. 若 $b_n < 0, c_n < 0$, 则由等式(1),(2)可知 $b_{n+1} < 0, c_{n+1} > 0$. 若 $b_n < 0, c_n > 0$, 则由等式(1),(2)可知 $b_{n+1} > 0, c_{n+1} > 0$. 从而 (b_n, c_n) 的符号以 3 为周期: \dots 、正正、负负、负正、 \dots .

若 $b_n > 0, c_n > 0$, 一元二次方程 $x^2 + b_n x + c_n = 0$ 有实根, 判别式 $b_n^2 - 4c_n \geq 0$, 即 $b_n^2 \geq 4c_n \geq 4b_n$, 故 $c_n \geq b_n \geq 4$.

若 $b_n > 0, c_n > 0$, 且 $n > 3$. 由等式(1)(2), 并结合 $c_n \geq b_n \geq 4$, 我们有

$$b_{n-1} = -(b_n + c_n) < 0, \quad c_{n-1} = b_n c_n > 0,$$

$$b_{n-2} = -(b_{n-1} + c_{n-1}) = b_n + c_n - b_n c_n < 0,$$

$$c_{n-2} = b_{n-1} c_{n-1} = -(b_n + c_n) b_n c_n < 0,$$

$$b_{n-3} = -(b_{n-2} + c_{n-2}) \geq -c_{n-2} = (b_n + c_n) b_n c_n \geq 4b_n.$$

设 $i \in \{1, 2, 3\}$, 使得 $b_i > 0, c_i > 0$. 于是对任意正整数 k , $b_{i+3k} > 0, c_{i+3k} > 0$.

反复利用上述不等式可得

$$b_i \geq 4^k b_{i+3k} \geq 4^{k+1}.$$

而 k 是任意的, 这不可能.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

综上所述, 所有满足条件的序列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{c_n\}_{n \geq 1}$ 只有恒为零的常数列. \square

6. 设 p, q 均是大于1的整数, 且 p 与 $6q$ 互素. 证明:

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2 \equiv 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q} \right] \pmod{q-1},$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

证明. 对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 记 $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

$$\begin{aligned} 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q} \right] &= 2q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{pk}{q} \left[\frac{pk}{q} \right] = q \sum_{k=1}^{q-1} \left(\left(\frac{pk}{q} \right)^2 + \left[\frac{pk}{q} \right]^2 - \left(\frac{pk}{q} - \left[\frac{pk}{q} \right] \right)^2 \right) \\ &= q \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{pk}{q} \right)^2 + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2 - q \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $(p, q) = 1$, $p \cdot 1, p \cdot 2, \dots, p \cdot (q-1)$ 除以 q 的余数取遍 $1, 2, \dots, q-1$. 从而,

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\}^2 = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right)^2.$$

代入(1)式, 得

$$\begin{aligned} 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q} \right] &= \frac{p^2-1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} k^2 + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2 \\ &= \frac{(p^2-1)(q-1)(2q-1)}{6} + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2. \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $(p, 6) = 1$, 故 $6 \mid p^2 - 1$. 因此, 由(2)得

$$2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[\frac{pk}{q} \right] \equiv \sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{pk}{q} \right]^2 \pmod{q-1}.$$

□

7. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $AB < AC$, $\angle BAC = 120^\circ$. 设 M 是弧 \widehat{BAC} 的中点, 点 P, Q 使得 PA, PB, QA, QC 均与 $\odot O$ 相切, H, I 分别是 $\triangle POQ$ 的垂心和内心, N 是线段 OI 的中点, D 是直线 MN 与 $\odot O$ 的另一个交点. 证明: $IH \perp AD$.

证明. 延长 BP, CQ 相交于点 L .

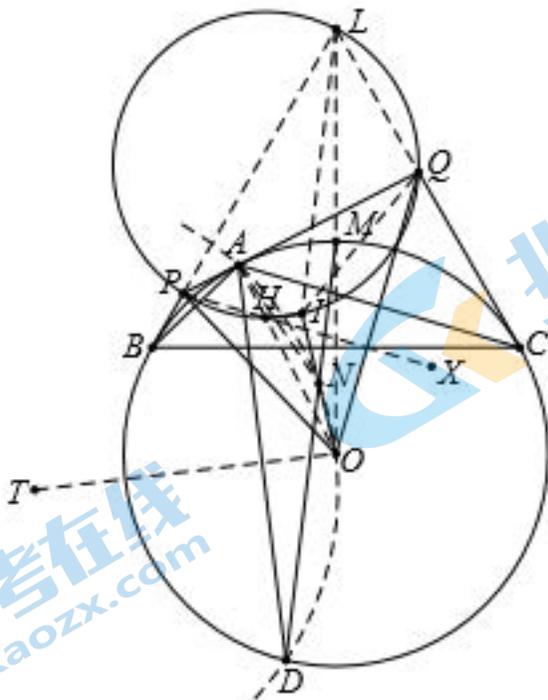
由已知条件可设 $\angle ABC = 30^\circ + \theta$, $\angle ACB = 30^\circ - \theta$. 不难得到

$$\angle OPA = 90^\circ - \angle POA = 90^\circ - \angle ACB = 60^\circ + \theta,$$

同理 $\angle OQA = 60^\circ - \theta$, 因此 $\angle POQ = 60^\circ$, 进而

$$\angle PIQ = \angle PHQ = 120^\circ.$$

又 O 是 $\triangle LPQ$ 的旁心, 所以 $\angle PLQ = 2(90^\circ - \angle POQ) = 60^\circ$, 故 L, P, H, I, Q 五点共圆. 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.



由于 OI 平分 $\angle POQ$, 并且

$$\angle AOI = \angle POI - \angle POA = 30^\circ - (30^\circ - \theta) = \theta,$$

$$\angle AOM = \angle BOM - \angle BOA = 60^\circ - 2(30^\circ - \theta) = 2\theta,$$

所以 OI 平分 $\angle AOM$, 于是

$$\angle AON = \angle AOI = \frac{1}{2}\angle AOM = \angle ADM = \angle ADN,$$

进而 A, N, O, D 四点共圆. 设外接圆圆心是 T .

延长 PH 到点 X . 由内心与垂心的性质可知

$$\angle OHI = \angle IHX + \angle OHX = \angle PQI + \angle OQP = \frac{3}{2}\angle OQP = \frac{3}{2}(60^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta.$$

注意到在直角 $\triangle LOB$ 中, $\angle BLO = 30^\circ$, 故 $LO = 2OB = 2OM$, 故 $MN \parallel LI$.

由于

$$\begin{aligned} \angle LIO &= \angle LIQ + \angle QIO = \angle LPQ + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle OPQ = 270^\circ - \frac{3}{2}\angle OPQ \\ &= 270^\circ - \frac{3}{2}(60^\circ + \theta) = 180^\circ - \frac{3}{2}\theta. \end{aligned}$$

因此 $\angle MNI = \angle ANI = \frac{3}{2}\theta$, $\angle AOD = \angle AND = 180^\circ - 3\theta$. 注意到 $OA = OD$, 故 OT 平分 $\angle AOD$ 且 $AD \perp OT$, 故

$$\angle AOT = \frac{1}{2}\angle AOD = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta,$$

于是 $\angle OHI = \angle AOT$. 而 A, O, H 共线, 故 $IH \parallel OT$. 又 $AD \perp OT$, 所以

$IH \perp AD$.

8. 给定正整数 n . 一个有限项正整数列 (a_1, \dots, a_m) 称为“ n -偶数列”: 若 $n = a_1 + \dots + a_m$, 且共有偶数个整数对 (i, j) 满足 $1 \leq i < j \leq m$ 而 $a_i > a_j$. 求 n -偶数列的个数.

例如, 共有六个4-偶数列: (4) 、 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ 、 $(1,1,2)$ 、 $(2,1,1)$ 、 $(1,1,1,1)$.

解. 一个有限项正整数列 (a_1, \dots, a_m) 称为“ n -数列”, 若 $n = a_1 + \dots + a_m$. 若 n -数列不是 n -偶数列, 则称为“ n -奇数列”. 记 $S(n)$ 为 n -偶数列与 n -奇数列的个数之差, 并定义 $S(0) = 1$. 下面证明: 对 $n \geq 1$,

$$S(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S(n-2k). \quad (*)$$

事实上, 我们可以将 n -数列分为下面几类 (当 $n = 1$ 时, 仅有第(i)类; 当 $n = 2$ 时, 仅有第(i)(iii)两类):

(i) $(a_1) = (n)$. 此类 n -偶数列与 n -奇数列个数之差为1;

(ii) 满足 $a_1 \neq a_2$ 的 n -数列. 注意到 n -数列 (a_1, a_2, \dots, a_m) 与 (a_2, a_1, \dots, a_m) 的奇偶性不同, 从而在满足 $a_1 \neq a_2$ 的 n -数列中, n -奇数列与 n -偶数列的个数相同.

(iii) 满足 $a_1 = a_2$ 的 n -数列. 在满足 $a_1 = a_2 = k$ ($1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) 的 n -数列中, 由于 (a_1, \dots, a_m) 与 (a_3, \dots, a_m) 的奇偶性相同, 故 n -偶数列与 n -奇数列的个数之差恰好是 $S(n-2k)$ (注意, $n = 2k$ 时, $S(0) = 1$ 对应 (k, k)).

综合(i),(ii),(iii)便知 (*) 式成立.

由 (*) 知, 当 $n \geq 3$ 时,

$$S(n) - S(n-2) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S(n-2k) - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} S(n-2k) = S(n-2).$$

即 $S(n) = 2S(n-2)$. 当 $n = 2$ 时, 亦有 $S(2) = 2 = 2S(0)$. 因此, 当 n 为奇数时,

$$S(n) = 1 + S(1) + S(3) + \dots + S(n-2) = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

当 n 为偶数时,

$$S(n) = 1 + S(0) + S(2) + \dots + S(n-2) = 2^{\frac{n}{2}}.$$

注意到 n -数列 (a_1, \dots, a_m) 与有序数组 $(a_1, a_1+a_2, \dots, a_1+a_2+\dots+a_m)$ 一

一对应, 而后的个数等于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 含 n 的子集个数, 故 n -数列的总数为

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。
 $2^n - 1$. 从而 n -偶数列个数为 $\frac{2^n + S(n)}{2} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-1}{2}}$. \square