

# 第19届CGMO 试题解答

瞿振华

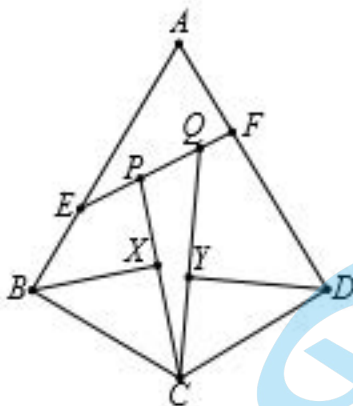
(华东师范大学, 200241)

北京高考在线  
www.gkzox.com

第19届中国女子数学奥林匹克(CGMO)于2020年8月8日至11日在江西省鹰潭一中举行. 下面介绍本次考试试题及解答.

## I. 试题

1. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB = AD$ ,  $CB = CD$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 点  $E, F$  分别在线段  $AB, AD$  上, 点  $P, Q$  在线段  $EF$  上 ( $P$  在  $E, Q$  之间), 满足  $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$ . 点  $X, Y$  分别在线段  $CP, CQ$  上, 满足  $BX \perp CP$ ,  $DY \perp CQ$ . 证明:  $X, P, Q, Y$  四点共圆. (华东师范大学 何忆捷 供题)



北京高考在线  
www.gkzox.com

2. 给定整数  $n \geq 2$ , 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是任意实数, 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2]$$

的最大值, 其中  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数.

(南方科技大学 付云峰 供题)

3. 设有三个班级, 每班恰有  $n$  名同学, 这  $3n$  名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成  $n$  组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高
- 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

的同学称为“高个子”。已知无论如何分组，每班都至少有 10 名同学是“高个子”。证明： $n$  的最小可能值是 40. (南方科技大学 付云峰 供题)

4. 设  $p, q$  是两个不同的素数,  $p > q$ . 证明:  $p! - 1$  与  $q! - 1$  的最大公约数不超过  $p^{\frac{q}{2}}$ . (复旦大学 程力 供题)

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  和  $\{c_n\}_{n \geq 1}$ :

(i) 对任意正整数  $n, b_n \leq c_n$ ;

(ii) 对任意正整数  $n, b_{n+1}$  与  $c_{n+1}$  是一元二次方程  $x^2 + b_n x + c_n = 0$  的两根.

(华东师范大学 廖拯 供题)

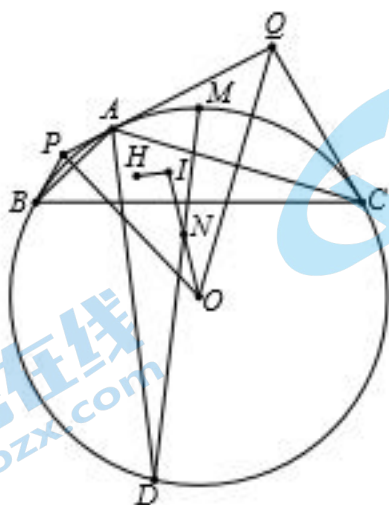
6. 设  $p, q$  均是大于 1 的整数, 且  $p$  与  $6q$  互素. 证明:

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 \equiv 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[ \frac{pk}{q} \right] \pmod{q-1},$$

其中  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数.

(南京师范大学 纪春岗 供题)

7. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB < AC, \angle BAC = 120^\circ$ , 外接圆  $\odot O$  在点  $A, B$  处的切线相交于点  $P$ , 在点  $A, C$  处的切线相交于点  $Q$ . 设  $H$  和  $I$  分别是  $\triangle POQ$  的垂心和内心,  $M$  是弧  $\widehat{BAC}$  的中点,  $N$  是线段  $OI$  的中点,  $D$  是直线  $MN$  与  $\odot O$  的另一个交点. 证明:  $IH \perp AD$ . (华东师范大学 林天齐 供题)

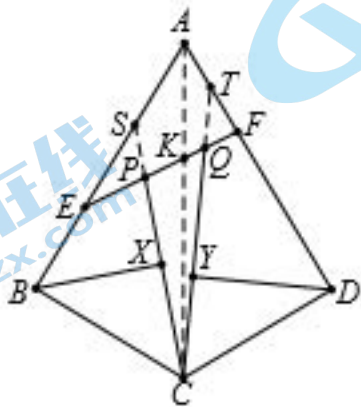


8. 给定正整数  $n$ . 一个有限项正整数列  $(a_1, \dots, a_m)$  称为“ $n$ -偶数列”: 若  $n = a_1 + \dots + a_m$ , 且共有偶数个整数对  $(i, j)$  满足  $1 \leq i < j \leq m$  而  $a_i > a_j$ . 求  $n$ -偶数列的个数.

例如, 共有六个 4-偶数列: (4)、(1,3)、(2,2)、(1,1,2)、(2,1,1)、(1,1,1,1).

## II. 解答

1. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB = AD$ ,  $CB = CD$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 点  $E, F$  分别在线段  $AB, AD$  上, 点  $P, Q$  在线段  $EF$  上 ( $P$  在  $E, Q$  之间), 满足  $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$ . 点  $X, Y$  分别在线段  $CP, CQ$  上, 满足  $BX \perp CP$ ,  $DY \perp CQ$ . 证明:  $X, P, Q, Y$  四点共圆.



证明. 由条件知  $\triangle ABC$  与  $\triangle ADC$  关于  $AC$  对称, 且

$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ.$$

设  $AC$  与  $EF$  交于点  $K$ , 由  $AK$  平分  $\angle EAF$  得  $\frac{AE}{AF} = \frac{KE}{KF}$ , 又  $\frac{AE}{AF} = \frac{EP}{FQ}$ ,

所以  $\frac{KE}{KF} = \frac{EP}{FQ}$ , 即  $\frac{KE}{EP} = \frac{KF}{FQ}$ .

延长  $CP$  交  $AE$  于点  $S$ , 延长  $CQ$  交  $AF$  于点  $T$ . 对  $\triangle KPC$  与截线  $ESA$  运用梅涅劳斯定理, 得

$$\frac{KE}{EP} \cdot \frac{PS}{SC} \cdot \frac{CA}{AK} = 1.$$

同理得

$$\frac{KF}{FQ} \cdot \frac{QT}{TC} \cdot \frac{CA}{AK} = 1.$$

于是

$$\frac{CS}{PS} = \frac{KE}{EP} \cdot \frac{CA}{AK} = \frac{KF}{FQ} \cdot \frac{CA}{AK} = \frac{CT}{QT},$$

故  $\frac{CS}{CP} = \frac{CT}{CQ}$ , 即  $\frac{CP}{CQ} = \frac{CS}{CT}$ .

注意到  $BX \perp CP$ ,  $DY \perp CQ$  及  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ , 得

$$\frac{CX \cdot CP}{CY \cdot CQ} = \frac{CX \cdot CS}{CY \cdot CT} = \frac{CB^2}{CD^2} = 1,$$



2. 给定整数  $n \geq 2$ , 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是任意实数, 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2]$$

的最大值, 其中  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数.

解. 注意到  $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{i=1}^n [x_i^2] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2])$ .

因为

$$2[x_i x_j] \leq 2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2 < [x_i^2] + [x_j^2] + 2,$$

且上式最左边和最右边都是整数, 故

$$2[x_i x_j] \leq [x_i^2] + [x_j^2] + 1.$$

等号必须在  $[x_i^2]$  和  $[x_j^2]$  奇偶性不同时才可能成立 (因为左边是偶数). 因此, 当  $[x_i^2]$  和  $[x_j^2]$  奇偶性不同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 1;$$

当  $[x_i^2]$  和  $[x_j^2]$  奇偶性相同时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] \leq 0.$$

设  $[x_1^2], [x_2^2], \dots, [x_n^2]$  中有  $k$  个奇数,  $n-k$  个偶数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]) \leq k(n-k) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

另一方面, 设  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . 如果

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1.4, x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 1.5,$$

那么当  $1 \leq i < j \leq m$  或  $m+1 \leq i < j \leq n$  时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 0;$$

而当  $1 \leq i \leq m$  且  $m+1 \leq j \leq n$  时,

$$2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] = 1.$$

此时

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]) = m(n-m) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

综上所述, 所求的最大值为  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

□

3. 设有三个班级, 每班恰有  $n$  名同学, 这  $3n$  名同学的身高两两不同. 现将这些同学分成  $n$  组, 每组 3 名同学分别来自不同的班级, 并将每组中身高最高的同学称为“高个子”. 已知无论如何分组, 每班都至少有 10 名同学是“高个子”. 证明:  $n$  的最小可能值是 40.

证法一. 首先对  $n = 40$  给出一种构造. 设三个班分别为  $A$  班,  $B$  班和  $C$  班. 所有学生由高到低分别为  $1, 2, \dots, 120$  号, 其中  $1, 2, \dots, 10$  号和  $71, 72, \dots, 100$  号在  $A$  班;  $11, 12, \dots, 30$  号和  $101, 102, \dots, 120$  号在  $B$  班;  $31, 32, \dots, 70$  号在  $C$  班.

从而  $A$  班的  $1, 2, \dots, 10$  号必然是“高个子”;  $B$  班的  $11, 12, \dots, 30$  号中最多有 10 名同学与  $1, 2, \dots, 10$  号之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”;  $C$  班的  $31, 32, \dots, 70$  号中最多有 30 名同学与  $1, 2, \dots, 30$  号至少之一同组, 剩下至少有 10 名同学是“高个子”. 因此这个构造满足题目要求.

下面证明 40 是最小的. 将  $3n$  名同学按身高由高到低顺次编号为  $1, 2, \dots, 3n$ , 我们先证明一个引理.

引理. 设三个班的学生满足题目中的条件, 则对于每个班, 都存在一个  $k$ , 使得编号为  $1, 2, \dots, k$  的学生中, 该班所占的人数比其它两个班所占的人数之和至少多 10 人.

引理的证明. 考虑一个班 (不妨设为  $A$  班), 设该班的所有同学的编号由小到大排列为  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , 其余两个班的所有同学编号由小到大排列为  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$ .

对  $1 \leq i \leq n-9$ , 将编号为  $a_{i+9}$  的  $A$  班同学和编号为  $x_i$  的  $B$  或  $C$  班同学分为一组, 然后将有  $A$  班和  $C$  班同学的组中添入一个未被分组的  $B$  班同学, 将有  $A$  班和  $B$  班同学的组中添入一个未被分组的  $C$  班同学, 剩下同学按照每组  $A, B, C$  班各一人分组, 此时除编号为  $a_1, a_2, \dots, a_9$  的同学外,  $A$  班还至少有一名同学是“高个子”, 设其编号为  $a_m$ , 那么  $a_m < x_{m-9}$ , 这说明在编号为  $1, 2, \dots, a_m$  的同学中,  $A$  班有  $m$  人,  $B, C$  两班加在一起最多  $m-10$  人, 因此引理得证.

回到原问题, 设  $A, B, C$  班对应的引理中的  $k$  分别为  $k_1, k_2, k_3$ , 且不妨设  $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ , 那么在  $1, 2, \dots, k_1$  号中,  $A$  班至少有 10 人; 在  $1, 2, \dots, k_2$  号中,  $B$  班至少有  $10+10=20$  人; 在  $1, 2, \dots, k_3$  号中,  $C$  班至少有  $10+20+10=40$  人.

因此 40 是最小可能值. □

证法二. 对学生的编号和构造同证法一, 下面仅证明 40 是最小的, 即证明  $n < 40$  时不可能满足题目中的条件.

假设可以满足条件, 由于每个班都至少有 10 名高个子, 故  $n \geq 30$ . 考虑  $a_{n-19}, b_{n-19}, c_{n-19}$ , 不妨设  $a_{n-19}$  是三个数中最小的, 故编号为  $a_1, a_2, \dots, a_{n-19}$  的学生都高于编号为  $b_{20}, b_{21}, \dots, b_n, c_{20}, c_{21}, \dots, c_n$  的学生.

现在对  $1 \leq i \leq n-19$ , 将  $a_i, b_{i+1}, c_{i+19}$  分为一组, 这些组中的高个子都是 A 班的, 剩下的学生按照每班一人分组, 则 B, C 班一共不超过 19 名高个子, 矛盾! 因此 40 是最小可能值.  $\square$

4. 设  $p, q$  是两个不同的素数,  $p > q$ . 证明:  $p! - 1$  与  $q! - 1$  的最大公约数不超过  $p^{\frac{3}{5}}$ .

证明. 记  $D = \gcd(p! - 1, q! - 1)$ . 易验证  $2! - 1, 3! - 1, 5! - 1, 7! - 1$  两两互素, 故  $p \leq 7$  时命题成立.

以下设  $p \geq 11$ . 注意到  $p! - q!$  被  $D$  整除, 而  $q!$  与  $D$  互素, 故  $D$  整除  $\frac{p!}{q!} - 1$ . 于是  $D \leq \frac{p!}{q!} \leq p^{p-q}$ . 如果  $q \geq \frac{2}{3}p$ , 则前式推出  $D \leq p^{\frac{3}{5}}$ , 已得证. 故以下设  $p > \frac{3}{2}q$ .

注意到  $D \mid (p! - q!^2)$ , 并且  $p! - q!^2 \neq 0$  (因为  $p! - q!^2$  不被素数  $p$  整除).

如果  $p > 2q$ , 则  $p!$  与  $q!^2$  有公因子  $q!^2$ , 它与  $D$  互素, 从而  $D$  整除  $\frac{p! - q!^2}{q!^2} = \frac{p!}{q!^2} - 1$ , 这推出  $D \leq \frac{p!}{q!^2}$ . 又  $D \mid (q! - 1)$  推出  $D \leq q!$ , 于是

$$D \cdot D^2 \leq \frac{p!}{q!^2} \cdot q!^2 = p! \leq p^p,$$

故  $D \leq p^{\frac{3}{5}}$ , 命题得证.

剩下的情况是  $\frac{3}{2}q < p \leq 2q$ , 此时  $p!$  与  $q!^2$  有公因子  $q!(p-q)!$ , 它与  $D$  互素, 故  $D$  整除  $\frac{p! - q!^2}{q!(p-q)!} \neq 0$ , 这推出

$$D \leq \left| \frac{p!}{q!(p-q)!} - \frac{q!}{(p-q)!} \right| \leq \max \left\{ \frac{p!}{q!(p-q)!}, \frac{q!}{(p-q)!} \right\}.$$

由于

$$\frac{p!}{q!(p-q)!} \leq 2^p \leq 11^{\frac{3}{5}} \leq p^{\frac{3}{5}},$$

而  $\frac{q!}{(p-q)!}$  可以写成  $2q - p$  个不超过  $p$  的连续正整数的乘积, 故

$$\frac{q!}{(p-q)!} \leq p^{2q-p} \leq p^{\frac{3}{5}},$$



其中最后一个不等式是因为  $\frac{3}{2}q < p$ . 于是  $D \leq p^{\frac{2}{3}}$ , 得证.  $\square$

5. 求满足下面两个条件的所有实数序列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  和  $\{c_n\}_{n \geq 1}$ :

(i) 对任意正整数  $n$ ,  $b_n \leq c_n$ ;

(ii) 对任意正整数  $n$ ,  $b_{n+1}$  与  $c_{n+1}$  是一元二次方程  $x^2 + b_n x + c_n = 0$  的两根.

解. 由条件(i),(ii)可知,  $b_{n+1}$  与  $c_{n+1}$  由  $b_n, c_n$  唯一确定, 且由韦达定理, 有

$$b_n = -(b_{n+1} + c_{n+1}), \quad (1)$$

$$c_n = b_{n+1}c_{n+1}. \quad (2)$$

若  $b_1 = c_1 = 0$ , 易知对所有  $n \geq 1$ , 均有  $b_n = c_n = 0$ , 我们得到满足题目条件的序列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  和  $\{c_n\}_{n \geq 1}$ , 对任意正整数  $n$ ,  $b_n = c_n = 0$ .

下面证明其他序列均不满足条件.

假设  $b_1, c_1$  中恰有一个为零. 若  $b_1 = 0$ , 则  $c_1 > 0$ , 方程  $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$  无实根, 不满足条件. 若  $c_1 = 0$ , 则  $b_1 < 0$ , 方程  $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$  的两根为  $b_2 = 0$ ,  $c_2 = -b_1 > 0$ , 方程  $x^2 + b_2 x + c_2 = 0$  无实根, 不满足条件.

假设  $b_1, c_1$  均不为零. 若  $b_n > 0, c_n > 0$ , 则由等式(1),(2)可知  $b_{n+1} < 0, c_{n+1} < 0$ . 若  $b_n < 0, c_n < 0$ , 则由等式(1),(2)可知  $b_{n+1} < 0, c_{n+1} > 0$ . 若  $b_n < 0, c_n > 0$ , 则由等式(1),(2)可知  $b_{n+1} > 0, c_{n+1} > 0$ . 从而  $(b_n, c_n)$  的符号以 3 为周期:  $\dots$ 、正正、负负、负正、 $\dots$ .

若  $b_n > 0, c_n > 0$ , 一元二次方程  $x^2 + b_n x + c_n = 0$  有实根, 判别式  $b_n^2 - 4c_n \geq 0$ , 即  $b_n^2 \geq 4c_n \geq 4b_n$ , 故  $c_n \geq b_n \geq 4$ .

若  $b_n > 0, c_n > 0$ , 且  $n > 3$ . 由等式(1)(2), 并结合  $c_n \geq b_n \geq 4$ , 我们有

$$b_{n-1} = -(b_n + c_n) < 0, \quad c_{n-1} = b_n c_n > 0,$$

$$b_{n-2} = -(b_{n-1} + c_{n-1}) = b_n + c_n - b_n c_n < 0,$$

$$c_{n-2} = b_{n-1} c_{n-1} = -(b_n + c_n) b_n c_n < 0,$$

$$b_{n-3} = -(b_{n-2} + c_{n-2}) \geq -c_{n-2} = (b_n + c_n) b_n c_n \geq 4b_n.$$

设  $i \in \{1, 2, 3\}$ , 使得  $b_i > 0, c_i > 0$ . 于是对任意正整数  $k$ ,  $b_{i+3k} > 0, c_{i+3k} > 0$ .

反复利用上述不等式可得

$$b_i \geq 4^k b_{i+3k} \geq 4^{k+1}.$$

而  $k$  是任意的, 这不可能.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.

综上所述, 所有满足条件的序列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  和  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  只有恒为零的常数列.  $\square$

6. 设  $p, q$  均是大于1的整数, 且  $p$  与  $6q$  互素. 证明:

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 \equiv 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[ \frac{pk}{q} \right] \pmod{q-1},$$

其中  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数.

证明. 对  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 记  $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ .

$$\begin{aligned} 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[ \frac{pk}{q} \right] &= 2q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{pk}{q} \left[ \frac{pk}{q} \right] = q \sum_{k=1}^{q-1} \left( \left( \frac{pk}{q} \right)^2 + \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 - \left( \frac{pk}{q} - \left[ \frac{pk}{q} \right] \right)^2 \right) \\ &= q \sum_{k=1}^{q-1} \left( \frac{pk}{q} \right)^2 + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 - q \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

由于  $(p, q) = 1, p \cdot 1, p \cdot 2, \dots, p \cdot (q-1)$  除以  $q$  的余数取遍  $1, 2, \dots, q-1$ . 从而,

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{pk}{q} \right\}^2 = \sum_{k=1}^{q-1} \left( \frac{k}{q} \right)^2.$$

代入(1)式, 得

$$\begin{aligned} 2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[ \frac{pk}{q} \right] &= \frac{p^2-1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} k^2 + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 \\ &= \frac{(p^2-1)(q-1)(2q-1)}{6} + q \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2. \end{aligned} \quad (2)$$

由于  $(p, 6) = 1$ , 故  $6 \mid p^2 - 1$ . 因此, 由(2)得

$$2p \sum_{k=1}^{q-1} k \left[ \frac{pk}{q} \right] \equiv \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{pk}{q} \right]^2 \pmod{q-1}.$$

□

7. 如图,  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆,  $AB < AC, \angle BAC = 120^\circ$ . 设  $M$  是弧  $\widehat{BAC}$  的中点, 点  $P, Q$  使得  $PA, PB, QA, QC$  均与  $\odot O$  相切,  $H, I$  分别是  $\triangle POQ$  的垂心和内心,  $N$  是线段  $OI$  的中点,  $D$  是直线  $MN$  与  $\odot O$  的另一个交点. 证明:  $IH \perp AD$ .

证明. 延长  $BP, CQ$  相交于点  $L$ .

由已知条件可设  $\angle ABC = 30^\circ + \theta, \angle ACB = 30^\circ - \theta$ . 不难得到

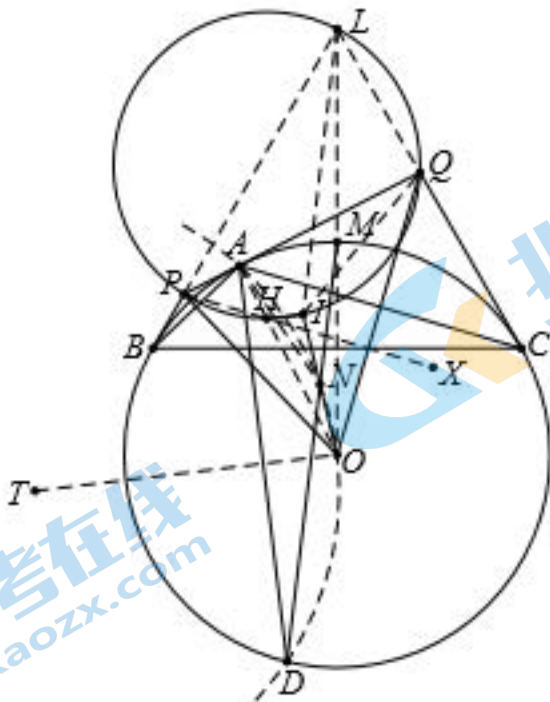
$$\angle OPA = 90^\circ - \angle POA = 90^\circ - \angle ACB = 60^\circ + \theta,$$

同理  $\angle OQA = 60^\circ - \theta$ , 因此  $\angle POQ = 60^\circ$ , 进而

$$\angle PIQ = \angle PHQ = 120^\circ.$$

又  $O$  是  $\triangle LPQ$  的旁心, 所以  $\angle PLQ = 2(90^\circ - \angle POQ) = 60^\circ$ , 故  $L, P, H, I, Q$  五点共圆. 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.





由于  $OI$  平分  $\angle POQ$ , 并且

$$\angle AOI = \angle POI - \angle POA = 30^\circ - (30^\circ - \theta) = \theta,$$

$$\angle AOM = \angle BOM - \angle BOA = 60^\circ - 2(30^\circ - \theta) = 2\theta,$$

所以  $OI$  平分  $\angle AOM$ , 于是

$$\angle AON = \angle AOI = \frac{1}{2}\angle AOM = \angle ADM = \angle ADN,$$

进而  $A, N, O, D$  四点共圆. 设外接圆圆心是  $T$ .

延长  $PH$  到点  $X$ . 由内心与垂心的性质可知

$$\angle OHI = \angle IHX + \angle OHX = \angle PQI + \angle OQP = \frac{3}{2}\angle OQP = \frac{3}{2}(60^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta.$$

注意到在直角  $\triangle LOB$  中,  $\angle BLO = 30^\circ$ , 故  $LO = 2OB = 2OM$ , 故  $MN \parallel LI$ .

由于

$$\begin{aligned} \angle LIO &= \angle LIQ + \angle QIO = \angle LPQ + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle OPQ = 270^\circ - \frac{3}{2}\angle OPQ \\ &= 270^\circ - \frac{3}{2}(60^\circ + \theta) = 180^\circ - \frac{3}{2}\theta. \end{aligned}$$

因此  $\angle MNI = \angle ANI = \frac{3}{2}\theta$ ,  $\angle AOD = \angle AND = 180^\circ - 3\theta$ . 注意到  $OA = OD$ , 故  $OT$  平分  $\angle AOD$  且  $AD \perp OT$ , 故

$$\angle AOT = \frac{1}{2}\angle AOD = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta,$$

于是  $\angle OHI = \angle AOT$ . 而  $A, O, H$  共线, 故  $IH \parallel OT$ . 又  $AD \perp OT$ , 所以

$IH \perp AD$ .

8. 给定正整数  $n$ . 一个有限项正整数列  $(a_1, \dots, a_m)$  称为“ $n$ -偶数列”: 若  $n = a_1 + \dots + a_m$ , 且共有偶数个整数对  $(i, j)$  满足  $1 \leq i < j \leq m$  而  $a_i > a_j$ . 求  $n$ -偶数列的个数.

例如, 共有六个4-偶数列:  $(4)$ 、 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ 、 $(1,1,2)$ 、 $(2,1,1)$ 、 $(1,1,1,1)$ .

解. 一个有限项正整数列  $(a_1, \dots, a_m)$  称为“ $n$ -数列”, 若  $n = a_1 + \dots + a_m$ . 若  $n$ -数列不是  $n$ -偶数列, 则称为“ $n$ -奇数列”. 记  $S(n)$  为  $n$ -偶数列与  $n$ -奇数列的个数之差, 并定义  $S(0) = 1$ . 下面证明: 对  $n \geq 1$ ,

$$S(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S(n-2k). \quad (*)$$

事实上, 我们可以将  $n$ -数列分为下面几类 (当  $n = 1$  时, 仅有第(i)类; 当  $n = 2$  时, 仅有第(i)(iii)两类):

(i)  $(a_1) = (n)$ . 此类  $n$ -偶数列与  $n$ -奇数列个数之差为1;

(ii) 满足  $a_1 \neq a_2$  的  $n$ -数列. 注意到  $n$ -数列  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  与  $(a_2, a_1, \dots, a_m)$  的奇偶性不同, 从而在满足  $a_1 \neq a_2$  的  $n$ -数列中,  $n$ -奇数列与  $n$ -偶数列的个数相同.

(iii) 满足  $a_1 = a_2$  的  $n$ -数列. 在满足  $a_1 = a_2 = k$  ( $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ) 的  $n$ -数列中, 由于  $(a_1, \dots, a_m)$  与  $(a_3, \dots, a_m)$  的奇偶性相同, 故  $n$ -偶数列与  $n$ -奇数列的个数之差恰好是  $S(n-2k)$  (注意,  $n = 2k$  时,  $S(0) = 1$  对应  $(k, k)$ ).

综合(i),(ii),(iii)便知 (\*) 式成立.

由 (\*) 知, 当  $n \geq 3$  时,

$$S(n) - S(n-2) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S(n-2k) - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} S(n-2k) = S(n-2).$$

即  $S(n) = 2S(n-2)$ . 当  $n = 2$  时, 亦有  $S(2) = 2 = 2S(0)$ . 因此, 当  $n$  为奇数时,

$$S(n) = 1 + S(1) + S(3) + \dots + S(n-2) = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

当  $n$  为偶数时,

$$S(n) = 1 + S(0) + S(2) + \dots + S(n-2) = 2^{\frac{n}{2}}.$$

注意到  $n$ -数列  $(a_1, \dots, a_m)$  与有序数组  $(a_1, a_1+a_2, \dots, a_1+a_2+\dots+a_m)$  一

一对应, 而後者的个数等于  $\{1, 2, \dots, n\}$  含  $n$  的子集个数, 故  $n$ -数列的总数为

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。  
 $2^n - 1$ . 从而  $n$ -偶数列个数为  $\frac{2^n + S(n)}{2} = 2^{n-2} + 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ .  $\square$