高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{3+2i}{1-i}$（i 为虚数单位），则 $|z+2i|=$

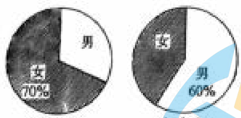
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{82}}{2}$　　D. $\frac{41}{2}$

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-4}{x+1}>0\right.\right\}$，$B=\{x|y=\ln(4-x^2)\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$　　B. $[-1,2)$

C. $[-1,4$　　D. $(-\infty,4]$

3. 某中学有高中生 3 000 人，初中生 2 000 人，男、女生所占的比例如下图所示．为了解学生的学习情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为 n 的样本，已知从高中生中抽取女生 21 人，则从初中生中抽取的男生人数是．



（高中生）　（初中生）

A. 12　　B. 15　　C. 20　　D. 21

4. 已知 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan 2\theta=$

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

5. 已知圆 $C_1:x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$ 的圆心到直线 $x-y-2=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，则圆 C_1 与圆 $C_2:x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的公切线共有

A. 0 条　　B. 1 条　　C. 2 条　　D. 3 条

6. 已知点 P 是曲线 $y=x^2-3\ln x$ 上任意一点，则点 P 到直线 $2x+2y+3=0$ 的距离的最小值是

A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{7}{8}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，直线 $y=kx$ 与 C 交于 A,B 两点(其中点 A 位于第一象限)，$|AB|=2|OF|$，O 为坐标原点，且 $\triangle FAB$ 的面积为 $4a^2$，则 C 的离心率是

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

8. 已知函数 $f(x)=|xe^x|$，关于 x 的方程 $f^2(x)+3tf(x)+t+1=0(t\in\mathbf{R})$ 有四个不同的实数根，则实数 t 的取值范围为

A. $\left(-\infty,-\frac{e^2+1}{e^2+3e}\right)$　　B. $\left(-1,-\frac{e^2+1}{e^2+3e}\right)$

C. $\left[-1,-\frac{e^2+1}{e^2+3e}\right)$　　D. $\left(-1,-\frac{e^2+1}{e^2+3e}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a>b>0,c>d>0$，则下列不等式成立的是

A. $a+c>b+d$　　B. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

C. $(a+b)^c>(a+b)^d$　　D. $c^{a+b}>d^{a+b}$

10. 将函数 $f(x)=\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$ 的图象上每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是

A. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

B. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{6},0\right)$ 对称

C. $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[0,1]$

D. $g(x)$ 的图象可由 $y=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度得到

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点，P 为四边形 DCC_1D_1 内一点(包含边界)，若 $PA_1\,/\!/$ 平面 AEC，则下列结论正确的是

A. $PA_1\perp BD_1$　　B. 三棱锥 B_1-PA_1B 的体积为定值

C. 线段 PA_1 长度的最小值为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$　　D. $\angle A_1PD_1$ 的最小值是 45°

12. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A,B 两点，O 为坐标原点，则下列判断正确的是

A. $\triangle OAB$ 可能为锐角三角形

B. 过点 $M(0,1)$ 且与抛物线 C 仅有一个公共点的直线有 2 条

C. 若 $|AF|=3$，则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $|AF|+2|BF|$ 最小值为 $3+2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，若 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $m=$_______.

14. $(x^2+x-2y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数是_______.

15. 已知等腰直角△ABC 的斜边 $BC=2$，沿斜边的高线 AD 将△ADC 折起，使二面角 $B-AD-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为________.

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)-f(x)<0$，且 $f(x+1)=f(1-x)$，$f(0)=e$，则不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集是________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知 a,b,c 分别为△ABC 三个内角 A,B,C 的对边，$c(1+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $b=2$，$a+c=4$，求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

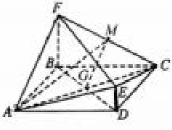
(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，菱形 $ABCD$ 与四边形 $BDEF$ 相交于 BD，$\angle ABC=120°$，$BF\perp$平面 $ABCD$，$DE\,/\!/\,BF$，$BF=2DE$，$AF\perp FC$，M 为 CF 的中点，$AC\cap BD=G$.

(1)求证：$GM\,/\!/$平面 CDE；

(2)求直线 AM 与平面 ACE 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

某工厂的污水处理程序如下：原始污水必先经过 A 系统处理，处理后的污水（A 级水）达到环保标准（简称达标）的概率为 $p(0<p<1)$. 经化验检测，若确认达标便可直接排放；若不达标则必须进行 B 系统处理后直接排放. 某厂现有 4 个标准水量的 A 级水池，分别取样、检测. 多个污水样本检测时，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验. 混合样本中只要有样本不达标，则混合样本的化验结果必不达标. 若混合样本不达标，则该组中各个样本必须再逐个化验；若混合样本达标，则原水池的污水直接排放. 现有以下四种方案：

方案一，逐个化验；

方案二，平均分成两组化验；

方案三，三个样本混在一起化验，剩下的一个单独化验；

方案四，混在一起化验.

化验次数的期望值越小，则方案越"优".

(1)若 $p=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，求 2 个 A 级水样本混合化验结果不达标的概率；

(2)若 $p=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，现有 4 个 A 级水样本需要化验，请问：方案一、二、四中哪个最"优"？

(3)若"方案三"比"方案四"更"优"，求 p 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，上顶点为 M，若直线 MF_1 的斜率为 1，且与椭圆的另一个交点为 N，$\triangle F_2MN$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)过点 F_1 的直线 l（直线 l 斜率不为 1）与椭圆交于 P,Q 两点，点 P 在点 Q 的上方，若 $S_{\triangle F_1NQ}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle F_1MP}$，求直线 l 的斜率.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $x>0$，求证：$\left(e^x-\dfrac{1}{2}x^2+1\right)\ln(x+1)>2x$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $z=\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$，所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$，$|\bar{z}+2i|=\left|\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i+2i\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

2. B　因为 $A=\left\{x\left|\frac{x-4}{x+1}>0\right.\right\}=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$，$B=\{x|y=\ln(4-x^2)\}=(-2,2)$，又 $U=\mathbf{R}$，所以 $\complement_UA=[-1,4]$，所以 $(\complement_UA)\cap B=[-1,2)$. 故选 B.

3. A　因为分层抽样的抽取比例为 $\frac{21}{3\ 000\times0.7}=\frac{1}{100}$，所以初中生中抽取的男生人数是 $\frac{2\ 000\times0.6}{100}=12$. 故选 A.

4. B　因为 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2}$，所以 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$. 故选 B.

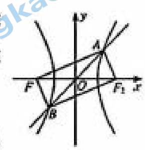
5. B　圆 $C_1:x^2+(y-a)^2=a^2$ 的圆心为 $(0,a)$，半径为 a，圆心到直线 $x-y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{|0-a-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，解得 $a=2$，所以圆 $C_1:x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $C_1(0,2)$，半径为 $r_1=2$.

圆 $C_2:x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$，圆心坐标为 $C_2(1,2)$，半径 $r_2=1$，圆心距 $d=\sqrt{(0-1)^2+(2-2)^2}=1=r_1-r_2$，所以两圆相内切. 故选 B.

6. D　由题意知，曲线 $y=x^2-3\ln x$ 在点 P 的切线与直线 $2x+2y+3=0$ 平行时，点 P 到直线 $2x+2y+3=0$ 的距离最小.

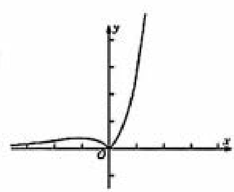
设 $P(x_0,y_0)$，则 $y'=2x-\frac{3}{x}$，则 $2x_0-\frac{3}{x_0}=-1$，解得 $x_0=1$，所以 $P(1,1)$，点 P 到直线 $2x+2y+3=0$ 的距离 $d=\frac{|2+2+3|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$. 故选 D.

7. C　如图，设 C 的右焦点为 F_1，连接 AF_1，BF_1，因为 $|AB|=2|OF|$，所以 $AF\perp BF$，由图形的对称性知 $AFBF_1$ 为矩形，则有 $|AF|-|AF_1|=2a$，$|AF|\cdot|AF_1|=8a^2$，所以 $|AF|=4a$，$|AF_1|=2a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AFF_1$ 中，$(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 故选 C.



8. B　令 $g(x)=xe^x$，则 $g'(x)=e^x(x+1)$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=-1$，故函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，且在 $x=-1$ 处，取得最小值 $g(-1)=-\frac{1}{e}$.

根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象之间的关系，即可绘制函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



令 $f(x)=m$，结合图象，根据题意若要满足 $f^2(x)+3tf(x)+t+1=0$ 有四个根，只需方程 $m^2+3tm+t+1=0$ 的两根 m_1 与 m_2 满足：

其中一个根 $m_1\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，另一个根 $m_2>\frac{1}{e}$ 或 $m_2=0$.

当方程 $m^2+3tm+t+1=0$ 的一个根 $m_1\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，另一个根 $m_2=0$ 时，

将 $m=0$ 代入，可得 $t=-1$，不符合题意.

当方程 $m^2+3tm+t+1=0$ 的一个根 $m_1\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，另一个根 $m_2>\frac{1}{e}$ 时，所以 $\begin{cases} t+1>0, \\ -\frac{3t}{2}>0, \\ \frac{1}{e^2}+\frac{3t}{e}+t+1<0, \end{cases}$ 解得 $-1<t<-\frac{e^2+1}{e^2+3e}$. 综上所述，实数 t 的取值范围为 $-1<t<-\frac{e^2+1}{e^2+3e}$. 故选 B.

9. ABD　由不等式的基本性质，可得 A 和 B 都正确；取 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，则 $a+b=\frac{3}{4}\in(0,1)$，从而 $\left(\frac{3}{4}\right)^c<\left(\frac{3}{4}\right)^d$，则 C 错误；考查幂函数 $y=x^{a+b}$，在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则由 $c>d>0$，即得 $c^{a+b}>d^{a+b}$，则 D 正确. 故选 ABD.

10. AD　因为 $f(x)=\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，所以 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，故 A 正确；$g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 对称，故 B 错误；当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$，故 C 错误；对于 D，由 $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$ 的图象，故 D 正确. 故选 AD.

11. BCD　取 DD_1 中点为 G，易得 A_1G∥平面 AEC，又 A_1C_1∥平面 AEC，又 $A_1C_1\cap A_1G=A_1$，A_1C_1，$A_1G\subset$ 平面 A_1C_1G，所以平面 A_1C_1G∥平面 AEC，又 P 为四边形 DCC_1D_1 内一点（包含边界），PA_1∥平面 AEC，所以点 P 在线段 C_1G 上，当点 P 在 G 处时，显然 PA_1 与 BD_1 不垂直，故 A 错误；$V_{三棱锥B_1-PA_1D_1}=V_{三棱锥P-A_1B_1D_1}=V_{三棱锥C_1-A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，故 B 正确；线段 PA_1 长度的最小值为点 A_1 到线段 C_1G 的距离，在△A_1C_1G 中，易得 $A_1G=\sqrt{5}$，$C_1G=\sqrt{5}$，$C_1A_1=2\sqrt{2}$，故线段 PA_1 长度的最小值为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$，故 C 正确；设 $D_1P=x$，$x\in\left[\frac{2\sqrt{5}}{5},2\right]$，易得 $A_1P=\sqrt{x^2+4}$，所以 $\cos\angle A_1PD_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立，又 $\angle A_1PD_1\in[0°,180°]$，所以 $\angle A_1PD_1$ 的最小值是 45°，故 D 正确. 故选 BCD.

12. CD　对于 A：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 方程为 $x=my+1$，由 $\begin{cases} x=my+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$，故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3<0$，所以∠$AOB$ 为钝角，故 A 错误；

对于 B：显然过 $M(0,1)$ 与抛物线 C 相切的直线有 2 条，当此直线与 x 轴平行时，与抛物线 C 也是仅有一个公共点，所以过样的直线有 3 条，故 B 错误；

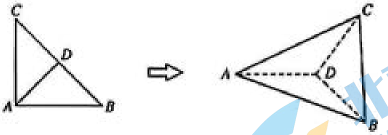
对于 C：当 $|AF|=3$ 时，此时 $A(2,\pm2\sqrt{2})$，不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$，此时 AB 方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$，联立抛物线 C：$y^2=4x$，解得 $B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|y_A-y_B|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；

对于 D：由选项 A 知，$|AF|+2|BF|=1+x_1+2(1+x_2)=3+x_1+2x_2=3+x_1+\frac{2}{x_1}=3+x_1+\frac{2}{x_1}\geqslant3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $x_1=\sqrt{2}$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 CD.

13. $\frac{1}{3}$　因为 $a=(-1,1)$，$b=(1,m)$，所以 $a+3b=(2,1+3m)$，由 $(a+3b)\perp a$，得 $-2+1+3m=0$，解得 $m=\frac{1}{3}$.

14. -160　$C_5^3(-2y)^3C_2^1x^2C_1^1x=-160x^3y^3$，所以 $(x^2+x-2y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数是 -160.

15. $\frac{7\pi}{3}$　如图所示，



等腰直角△ABC 图形翻折后 $AD\perp CD$，$AD\perp BD$，且 $CD\cap BD=D$，可得 $AD\perp$ 面 BDC，故$\angle CDB$ 是二面角 $B-AD-C$ 的平面角，即$\angle CDB=\frac{\pi}{3}$，故△BCD 是边长为 1 的等边三角形，其外接圆半径满足$\frac{1}{\sin 60^\circ}=2r$，解得 $r=\frac{\sqrt3}{3}$. 又因为 $AD=1$，故四面体 $ABCD$ 的外接球半径满足 $R^2=r^2+\left(\frac12\right)^2=\frac{7}{12}$，则其表面积为 $4\pi R^2=\frac{7\pi}{3}$.

16. $(-\infty,2)$　设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$\therefore g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递减. $\because f(x+1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，$\therefore f(2)=f(0)=e$，$\therefore g(2)=\frac{f(2)}{e^2}=\frac1e$. $\because f(x)>e^{x-1}$，$\therefore \frac{f(x)}{e^x}>\frac1e$，即 $g(x)>g(2)$，$\therefore x<2$，故不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集是$(-\infty,2)$.

17. 解：(1) 因为 $c(1+\cos B)=\sqrt3 b\sin C$，由正弦定理可得 $\sin C(1+\cos B)=\sqrt3\sin B\sin C$. ………… 2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $1+\cos B=\sqrt3\sin B$，得 $2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac12$.

………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2) 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=4^2-2ac-2ac\times\frac12=16-3ac$，………… 6 分

即 $2^2=16-3ac$，解得 $ac=4$. ………… 8 分

所以 $S=\frac12 ac\sin B=\frac12\times4\times\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$. ………… 10 分

18. 解：(1) 因为$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac1n-\frac{1}{n+1}$，………… 2 分

所以$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac1n(n\geq2)$，$\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$，

…

$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1-\frac12$，

所以$\frac{a_n}{n}-a_1=1-\frac1n(n\geq2)$. ………… 4 分

又 $a_1=1$，所以$\frac{a_n}{n}=\frac{2n-1}{n}$，所以 $a_n=2n-1(n\geq2)$. ………… 5 分

又 $a_1=1$，也符合上式，

所以 $a_n=2n-1$. ………… 6 分

(2) 结合(1)得 $b_n=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以

$S_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，　①

$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，②

①－②，得 $\frac{2}{3}S_n=1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{3^n}$

$=1+\frac{2\times\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$，…………………………………… 10 分

所以 $S_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$．…………………………………………………………………… 12 分

19.(1)证明：取 BC 的中点 N，连接 GN，MN．

因为 G 为菱形对角线的交点，所以 G 为 AC 中点．

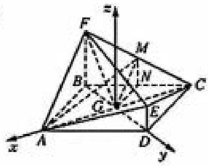
又 N 为 BC 中点，所以 $GN/\!/CD$，又 $GN\not\subset$ 平面 CDE，$CD\subset$ 平面 CDE，所以 $GN/\!/$ 平面 CDE．

又因为 M，N 分别为 FC，BC 的中点，…………………………………………………… 2 分

所以 $MN/\!/FB$，又因为 $DE/\!/BF$，所以 $DE/\!/MN$，$MN\not\subset$ 平面 CDE，$DE\subset$ 平面 CDE，所以 $MN/\!/$ 平面 CDE，

又 MN，$GN\subset$ 平面 MNG，$MN\cap GN=N$，所以平面 $GMN/\!/$ 平面 CDE．

又 $GM\subset$ 平面 GMN，所以 $GM/\!/$ 平面 CDE．………………………………… 4 分



(2)解：连接 GF．

设菱形的边长 $AB=2$，则由 $\angle ABC=120^\circ$，得 $GB=GD=1$，$GA=GC=\sqrt{3}$．

又因为 $AF\perp FC$，所以 $FG=GA=\sqrt{3}$，

则在直角△GBF 中，$BF=\sqrt{2}$，所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $BF\perp$ 平面 $ABCD$，$DE/\!/BF$，得 $DE\perp$ 平面 $ABCD$．…………………………………… 6 分

以 G 为坐标原点，分别以 GA，GD 所在直线为 x 轴，y 轴，过点 G 与平面$ABCD$垂直的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $G-xyz$，则 $G(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$E\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$F(0,-1,\sqrt{2})$，$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{GA}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{GE}=\left(0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．………………………………………………………… 8 分

设 $m=(x,y,z)$ 为平面 ACE 的一个法向量，

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{GA}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{GE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=\sqrt{2}$，得 $y=-1$，所以 $m=(0,-1,\sqrt{2})$．……………………………………………… 10 分

又 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AM},m\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot m}{|\overrightarrow{AM}||m|}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\sqrt{1+2}\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$．

设直线 AM 与平面 ACE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$．

所以直线 AM 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．…………………………………… 12 分

20. 解：(1)该混合样本达标的概率是$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$，

所以根据对立事件原理，不达标的概率为$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. ………………………………………… 2分

(2)方案一：逐个检测，检测次数为4.

方案二：由(1)知，每组两个样本检测时，若达标则检测次数为1，概率为$\frac{4}{5}$；若不达标则检测次数为3，概率为$\frac{1}{5}$. 设方案二的检测次数为ξ_2，则ξ_2可取2，4，6. 其分布列如下：

ξ_2	2	4	6
P	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$C_2^1\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$

可求得方案二的数学期望为$E(\xi_2)=2\times\frac{16}{25}+4\times\frac{8}{25}+6\times\frac{1}{25}=\frac{70}{25}=\frac{14}{5}$. ………………………………………… 4分

方案四：混在一起检测，设检测次数为ξ_4，则ξ_4可取1，5. 其分布列如下：

ξ_4	1	5
P	$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4$	$1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4$

可求得方案四的数学期望为$E(\xi_4)=1\times\frac{16}{25}+5\times\frac{9}{25}=\frac{61}{25}$.

比较可得$E(\xi_4)<E(\xi_2)<4$，故选择方案四最“优”. ………………………………………… 6分

(3)方案三：设方案三的化验次数为η_3，则η_3可取2，5. 其分布列如下：

η_3	2	5
P	p^2	$1-p^2$

可求得方案三的数学期望为$E(\eta_3)=2\cdot p^2+5(1-p^2)=5-3p^2$； ………………………………………… 8分

方案四：设方案四的化验次数为η_4，则η_4可取1，5. 其分布列如下：

η_4	1	5
P	p^4	$1-p^4$

可求得方案四的数学期望为$E(\eta_4)=1\cdot p^4+5(1-p^4)=5-4p^4$. ………………………………………… 10分

由题意得$E(\eta_3)<E(\eta_4)$，即$5-3p^2<5-4p^4$，解得$p<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故当$0<p<\frac{\sqrt{3}}{2}$时，方案三比方案四更“优”. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)因为$\triangle F_2MN$的周长为$4\sqrt{2}$，所以$4a=4\sqrt{2}$，即$a=\sqrt{2}$. ………………………………………… 2分

由直线MF_1的斜率为1，得$\frac{b}{c}=1$. ………………………………………… 3分

因为$a^2=b^2+c^2$，所以$b=1$，$c=1$. ………………………………………… 4分

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………… 5分

(2)由题可得直线MF_1方程为$y=x+1$，联立$\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$得$N\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

所以$\frac{|NF_1|}{|MF_1|}=\frac{1}{3}$. ………………………………………… 7分

因为 $S_{\triangle F_1NQ}=\frac{2}{3}S_{\triangle F_1MP}$，即 $\frac{1}{2}|NF_1|\cdot|QF_1|\sin\angle QF_1N=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|PF_1|\sin\angle PF_1M\right)$，

所以 $|QF_1|=2|PF_1|$. …………………………………………………………………………………… 8 分

当直线 l 的斜率为 0 时，不符合题意，

故设直线 l 的方程为 $x=my-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由点 P 在点 Q 的上方，则 $y_2=-2y_1$.

联立 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，所以 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2},\\ y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2},\end{cases}$ …………………………… 10 分

消去 y_2 得 $\begin{cases}y_1=\frac{-2m}{m^2+2},\\ 2y_1^2=\frac{1}{m^2+2},\end{cases}$ 所以 $\frac{8m^2}{(m^2+2)^2}=\frac{1}{m^2+2}$，得 $m^2=\frac{2}{7}$，$m=\pm\frac{\sqrt{14}}{7}$，

又由点 P 在点 Q 的上方知 $m=\frac{\sqrt{14}}{7}$ 不符合题意，所以 $m=-\frac{\sqrt{14}}{7}$. …………………………… 11 分

故直线 l 的斜率为 $\frac{1}{m}=-\frac{\sqrt{14}}{2}$. …………………………………………………………… 12 分

22.（1）解：由题意知 $f'(x)=e^x-x-a$，$x\in[0,+\infty)$，令 $u(x)=f'(x)$，则 $u'(x)=e^x-1$，则 $u'(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 1 分

当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant f'(0)=1-a\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意； ……………………………………………………………………………………… 3 分

当 $a>1$ 时，$f'(0)=1-a<0$.

令 $h(x)=e^x-2x$，则 $h'(x)=e^x-2$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$.

所以 $f'(a)=e^a-a-a=e^a-2a>0$. 又 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\exists x_0\in(0,a)$，使得 $f'(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x_0)<f(0)=0$，不符合题意.

……… 5 分

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 6 分

（2）证明：由（1）得，当 $a=1$，$x>0$ 时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$，即 $e^x-\frac{x^2}{2}+1>x+2$. ……………………… 7 分

要证不等式 $\left(e^x-\frac{1}{2}x^2+1\right)\ln(x+1)>2x$，只需证明 $e^x-\frac{1}{2}x^2+1>\frac{2x}{\ln(x+1)}$，只需证明 $x+2>\frac{2x}{\ln(x+1)}$.

即只需证 $\ln(x+1)>\frac{2x}{2+x}$， ……………………………………………………………………… 10 分

设 $F(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$，则 $F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$，

当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $F(0)=0$，所以 $F(x)>0$ 恒成立. 所以原不等式成立. …………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。