北京市东城区 2019-2020 学年度第二学期高三综合练习(二)

数学

2020.6

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{5\}$，那么 $(\complement_U A)\cup B=$

(A) $\{0,1,2\}$　　(B) $\{3,4,5\}$　　(C) $\{1,4,5\}$　　(D) $\{0,1,2,5\}$

(2) 已知三个函数 $y=x^3, y=3^x, y=\log_3 x$，则

(A) 定义域都为 **R**　　(B) 值域都为 **R**　　(C)在其定义域上都是增函数　　(D) 都是奇函数

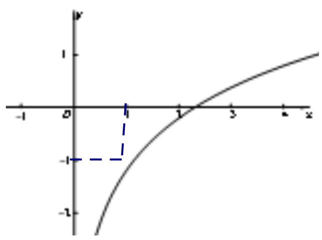
(3) 平面直角坐标系中，已知点 A,B,C 的坐标分别为 $(0,1),(1,0),(4,2)$，且四边形 $ABCD$ 为平行四边形，那么 D 点的坐标为

(A) $(3,3)$　　(B) $(-5,1)$　　(C) $(3,-1)$　　(D) $(-3,3)$

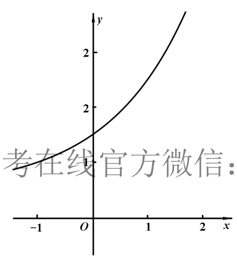
(4) 双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线与直线 $x=1$ 交于 A,B 两点，且 $|AB|=4$，那么双曲线 C 的离心率为

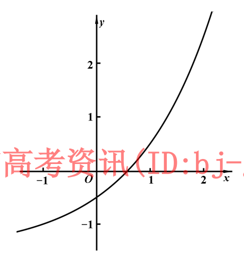
(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

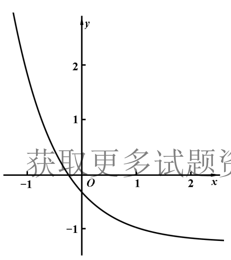
(5) 已知函数 $f(x)=\log_a x+b$ 的图象如图所示，

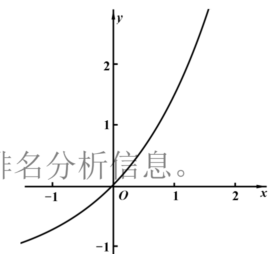


那么函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能为









(A)　　　　　　　　　　（B）　　　　　　　　　　（C）　　　　　　　　　　（D）

(6) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,5)$，$\boldsymbol{b}=(4,-3)$，$\boldsymbol{c}=(-2,-1)$，那么下列结论正确的是

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 为共线向量　　　　(B) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直

(C) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为钝角　　　　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角

(7)《九章算术》成书于公元一世纪，是中国古代乃至东方的第一部自成体系的数学专著．书中记载这样一个问题“今有宛田，下周三十步，径十六步．问为田几何？”（一步=1.5 米）意思是现有扇形田，弧长为 45 米，直径为 24 米，那么扇形田的面积为

(A) 135 平方米　　(B) 270 平方米　　(C) 540 平方米

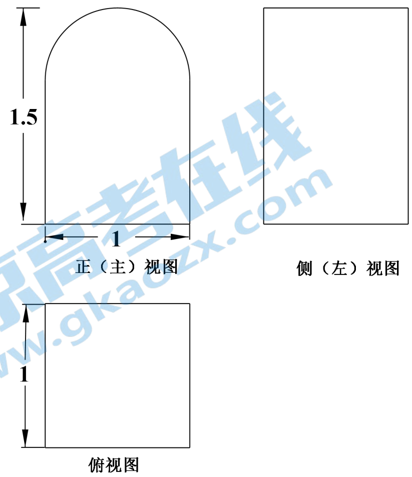
(D) 1080 平方米

(8) 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2$，那么“$a>0$”是“$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数”的

(A) 充分而不必要条件　　　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知一个几何体的三视图如图所示，正（主）视图是由一个半圆弧和一个正方形的三边拼接而成的，俯视图和侧（左）视图分别为一个正方形和一个长方形，那么这个几何体的体积是



（A）$1+\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$1+\dfrac{\pi}{4}$

（C）$1+\dfrac{\pi}{8}$　　（D）$1+\pi$

(10) 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且它的最小正周期是 T，已知

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in[0,\dfrac{T}{4}], \\ \dfrac{T}{2}-x,\ x\in(\dfrac{T}{4},\dfrac{T}{2}], \end{cases}$$

$g(x)=f(x+a)(a\in\mathbf{R})$．给出下列四个判断：

① 对于给定的正整数 n，存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}g(\dfrac{i\cdot T}{n})f(\dfrac{i\cdot T}{n})=0$ 成立；

② 当 $a=\dfrac{T}{4}$ 时，对于给定的正整数 n，存在 $k\in\mathbf{R}\,(k\neq 1)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} g(k\dfrac{i\cdot T}{n})f(\dfrac{i\cdot T}{n})=0$ 成立；

③ 当 $a=k\dfrac{T}{4}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，函数 $g(x)+f(x)$ 既有对称轴又有对称中心；

④ 当 $a=k\dfrac{T}{4}$（$k\in\mathbf{Z}$）时， $g(x)+f(x)$ 的值只有 0 或 $\dfrac{T}{4}$.

其中正确判断的有

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分。

(11) 复数 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 为________.

(12) 已知 $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos^2(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)-2\cos^2(\pi-\alpha)$ 的值为________.

(13) 设 α,β,γ 是三个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，给出下列三个结论：

①若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\,/\!/\,n$；

②若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$；

③若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$.

其中，正确结论的序号为________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

(14) 从下列四个条件① $a=\sqrt{2}c$；② $C=\dfrac{\pi}{6}$；③ $\cos B=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；④ $b=\sqrt{7}$ 中选出三个条件，能使满足所选条件的△ABC 存在且唯一，你选择的三个条件是___（填写相应的序号），所选三个条件下的 c 的值为 ____.

(15) 配件厂计划为某项工程生产一种配件，这种配件每天的需求量是200 件．由于生产这种配件时其他生产设备必须停机，并且每次生产时都需要花费5000 元的准备费，所以需要

周期性生产这种配件，即在一天内生产出这种配件，以满足从这天起连续 n 天的需求，称 n 为生产周期(假设这种配件每天产能可以足够大)．配件的存储费为每件每天 2 元(当天生产出的配件不需要支付存储费，从第二天开始付存储费)．在长期的生产活动中，为使每个生产周期内每天平均的总费用最少，那么生产周期 n 为_______．

三、解答题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

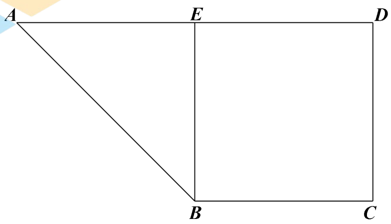
（16）（本小题 14 分）

如图①，四边形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$CD \perp BC$，$BC = CD = 1$，$AD = 2$，E 为 AD 中点.

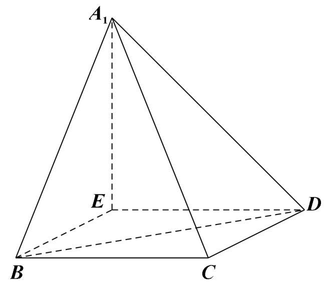
将 ΔABE 沿 BE 折起到 ΔA_1BE 的位置，如图②.

（Ⅰ）求证：平面 $A_1EB \perp$ 平面 A_1ED；

（Ⅱ）若 $\angle A_1ED = 90^\circ$，求 A_1C 与平面 A_1BD 所成角的正弦值.



图①



图②

（17）（本小题 14 分）

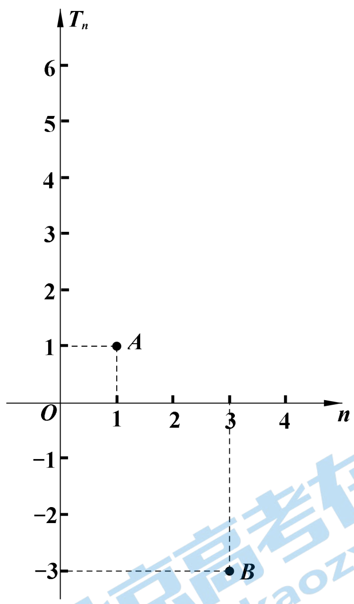
已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，其前 n 项和为 S_n，且满足 $a_3 = 1$，$S_3 = 3a_2 + 1$．$\{b_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 T_n，如图____，T_n 的图象经过 A，B 两个点.

（Ⅰ）求 S_n；

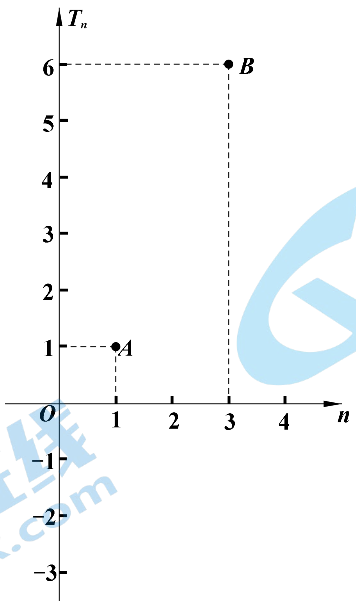
（Ⅱ）若存在正整数 n，使得 $b_n > S_n$，求 n 的最小值.

从图①，图②，图③中选择一个适当的条件，补充在上面问题中并作答.

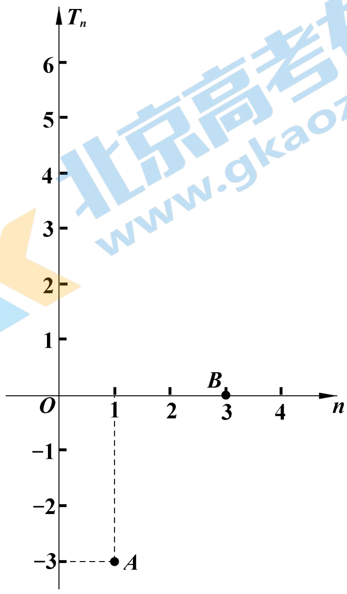
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。



图①



图②



图③

（18）（本小题 14 分）

某志愿者服务网站在线招募志愿者，当报名人数超过计划招募人数时，将采用随机抽取的方法招募志愿者，下表记录了 A, B, C, D 四个项目最终的招募情况，其中有两个数据模糊，记为 a,b.

项目	计划招募人数	报名人数
A	50	100
B	60	a
C	80	b
D	160	200

甲同学报名参加了这四个志愿者服务项目，记 ξ 为甲同学最终被招募的项目个数，已知 $P(\xi=0)=\dfrac{1}{40}$，$P(\xi=4)=\dfrac{1}{10}$.

（Ⅰ）求甲同学至多获得三个项目招募的概率；

（Ⅱ）求 a， b 的值；

（Ⅲ）假设有十名报了项目 A 的志愿者（不包含甲）调整到项目 D，试判断 $E\xi$ 如何变化（结论不要求证明）.

(19) （本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点坐标为 $A(0,-1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 $y=k(x-1)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 P，Q，线段 PQ 的中点为 M，点 $B(1,0)$，求证：点 M 不在以 AB 为直径的圆上.

（20）（本小题 15 分）

已知 $f(x)=e^x+\sin x+ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=-2$ 时，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

（Ⅱ）若对任意 $x\geq 0$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 有最小值，请直接给出实数 a 的取值范围.

（21）（本小题 14 分）

设数列：A: a_1，a_2，…，a_n，B: b_1，b_2，…，b_n. 已知 a_i，$b_j\in\{0,1\}$（$i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$），定义 $n\times n$ 数表 $X(A,B)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$，其中

$$x_{ij}=\begin{cases} 1 & a_i=b_j, \\ 0 & a_i\neq b_j, \end{cases}$$

（Ⅰ）若 A: 1,1,1,0，B: 0,1,0,0，写出 $X(A,B)$；

（Ⅱ）若 A，B 是不同的数列，求证：$n\times n$ 数表 $X(A,B)$ 满足“$x_{ij}=x_{ji}$（$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n;i\neq j$）”的充分必要条件为“$a_k+b_k=1\ (k=1,2,\cdots,n)$”；

（Ⅲ）若数列 A 与 B 中的 1 共有 n 个，求证：$n\times n$ 数表 $X(A,B)$ 中 1 的个数不大于 $\dfrac{n^2}{2}$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

北京市东城区 2019-2020 学年度第二学期高三综合练习（二）

数学参考答案及评分标准 2020.6

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B （2）C （3）A （4）D （5）B

（6）B （7）B （8） A （9）C （10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-1+\mathrm{i}$ （12）-1

（13）①② （14）①③④，$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，或者②③④，$\sqrt{2}$

（15）5

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：因为四边形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$CD \perp BC$，$BC=1$，$AD=2$，

E 为 AD 中点，

所以 $BE \perp AD$.

故 图②中，$BE \perp A_1E$，$BE \perp DE$.

又 因为 $A_1E \cap DE = E$，A_1E，$DE \subset$ 平面 A_1DE，

所以 $BE \perp$ 平面 A_1DE.

又 因为 $BE \subset$ 平面 A_1EB，

所以 平面 $A_1EB \perp$ 平面

A_1DE. ……………6 分

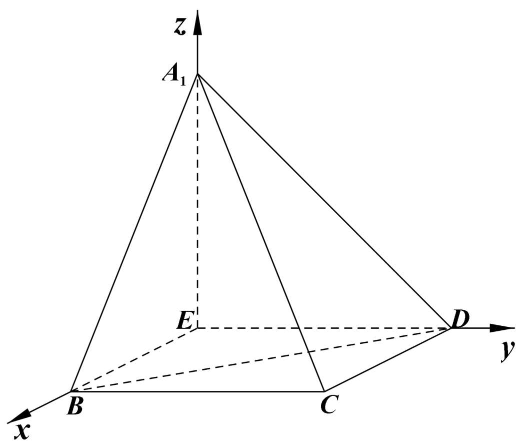
（Ⅱ）解： 由 $\angle A_1ED = 90^\circ$ 得 $A_1E \perp DE$，

又 $A_1E \perp BE$，$BE \perp DE$，

因此，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$.

由 $A_1E = CD = DE = 1$，

得 $A_1(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，



$D(0,1,0)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-z=0,\\ y-z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$ 得 $x=1, y=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，

设直线 A_1C 与平面 A_1BD 所成角为 θ，

所以

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$$

…

…………14 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由 $S_3=3a_2+1$，得 $a_1=2a_2$，即 $\dfrac{a_3}{q^2}=\dfrac{2a_3}{q}$，

因为 $a_3\neq 0$，

所以 $q=\dfrac{1}{2}$，$a_1=4$.

所以

$$S_n=\frac{4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=8\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=8-2^{3-n}.$$

……………………

…………6 分

（Ⅱ）由图①知：$T_1=b_1=1$，$T_3=-3$，可判断 $d<0$，数列 $\{b_n\}$ 是递减数列；而 $\left\{8-2^{3-n}\right\}$ 递增，由于 $b_1<S_1$，

所以选择①不满足“存在 n，使得 $b_n>S_n$”

由图②知：$T_1=b_1=1$，$T_3=6$，可判断 $d>0$，数列 $\{b_n\}$ 是递增数列；

由图③知：$T_1=b_1=-3$，$T_3=0$，可判断$d>0$，数列$\{b_n\}$是递增数列.

所以选择②③均可能满足“存在n，使得$b_n>S_n$”

第一种情况：

如果选择条件②即$T_1=b_1=1$，$T_3=6$，可得：$d=1$，$b_n=n$.

当n=1,2,3,4,5,6,7时，$b_n>S_n$不成立，

当$n=8$时，$b_8=8,\ S_8=8-2^{3-8}<b_8$

所以 使得$b_n>S_n$成立的 n的最小值为 8. ………………………………14 分

第二种情况：

如果选择条件③即$T_1=b_1=-3$，$T_3=0$，可得：$d=3$，$b_n=3n-6$.

当n=1,2,3,4时，$b_n>S_n$不成立，

当$n=5$时，$b_5=9,\quad S_5=8-2^{3-5}<b_5$成立，

所以 使得$b_n>S_n$ 成立的n的最小值为 5. ………………………………14 分

（18）（本小题 14 分）

解：因为$P(\xi=0)=\dfrac{1}{40}$，

所以$a>60$，且$b>80$.

设事件 A 表示“甲同学被项目 A 招募”，由题意可知，$P(A)=\dfrac{50}{100}=\dfrac{1}{2}$；

设事件 B 表示“甲同学被项目 B 招募”，由题意可知，$P(B)=\dfrac{60}{a}$；

设事件 C 表示“甲同学被项目 C 招募”，由题意可知，$P(C)=\dfrac{80}{b}$；

设事件 D 表示“甲同学被项目 D 招募”，由题意可知，$P(D)=\dfrac{160}{200}=\dfrac{4}{5}$；

（Ⅰ）由于事件“甲同学至多获得三个项目招募”与事件“$\xi=4$”是对立的，

所以甲同学至多获得三个项目招募的概率是$1-P(\xi=4)=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$. ………………………………4 分

（Ⅱ）由题意可知，

$$P(\xi=0)=P(\overline{ABCD})=(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{60}{a})\cdot(1-\frac{80}{b})\cdot(1-\frac{4}{5})=\frac{1}{40};$$

$$P(\xi=4)=P(ABCD)=\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{a}\cdot\frac{80}{b}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{10};$$

解得 $a=120$，$b=160$. ……………………………………12 分

（Ⅲ）$E\xi$ 变大. ………………………………………14 分

(19) （本小题 14 分）

（Ⅰ）**解**：由题意可知 $\begin{cases} b^2+c^2=a^2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ b=1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}, \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）**证明**：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \\ y=k(x-1), \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，

所以 $\Delta=(-8k^2)^2-4\times(4k^2+1)(4k^2-4)=48k^2+16$.

所以 当 k 为任何实数时，都有 $\Delta>0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}$.

因为 线段 PQ 的中点为 M，

所以 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{4k^2+1}$，$y_0=k(x_0-1)=\dfrac{-k}{4k^2+1}$，

因为 $B(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=(x_0,y_0+1)$，$\overrightarrow{BM}=(x_0-1,y_0)$.

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=x_0(x_0-1)+y_0(y_0+1)=x_0^{\ 2}-x_0+y_0^{\ 2}+y_0$

$$=(\frac{4k^2}{4k^2+1})^2-\frac{4k^2}{4k^2+1}+(\frac{-k}{4k^2+1})^2+\frac{-k}{4k^2+1}$$

$$=\frac{-4k^3-3k^2-k}{(4k^2+1)^2}$$

$$=\frac{-k(4k^2+3k+1)}{(4k^2+1)^2}$$

$$=\frac{-k[4(k+\frac{3}{8})^2+\frac{7}{16}]}{(4k^2+1)^2}.$$

又因为 $k\neq 0$，$4(k+\frac{3}{8})^2+\frac{7}{16}>0$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}\neq 0$，

所以点 M 不在以 AB 为直径的圆上. ……………………………………14 分

（20）（本小题 15 分）

（Ⅰ）解：$f'(x)=e^x+\cos x+a$，

对于 $a=-2$，

当 $x<0$ 时，$e^x<1,\cos x\le 1$，

所以 $f'(x)=e^x+\cos x-2<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. ……………………………………4 分

（Ⅱ）**解：**当 $x=0$ 时，$f(x)=1\ge 1$，对于 $a\in \mathrm{R}$，命题成立，

当 $x>0$ 时，设 $g(x)=e^x+\cos x+a$，

则 $g'(x)=e^x-\sin x$.

因为 $e^x>1$，$\sin x\le 1$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x>1-1=0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0)=2+a$，

所以 $g(x)>2+a$.

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(x)>2+a$.

① 当 $a\ge -2$ 时， $f'(x)>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(0)=1$ ，

所以 $f(x)>1$ 恒成立.

② 当 $a<-2$ 时， $f'(0)=2+a<0$ ，

因为 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又当 $x=\ln(2-a)$ 时， $f'(x)=-a+2+\cos x+a=2+\cos x>0$ ，

所以 存在 $x_0\in(0,+\infty)$ ，对于 $x\in(0,x_0)$ ， $f'(x)<0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以 当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f(x)<f(0)=1$ ，不合题意.

综上，当 $a\ge -2$ 时，对于 $x\ge 0$ ， $f(x)\ge 1$ 恒成立. ……………………………………13 分

（III）解： $a<0$. ……………………………………15 分

（21）（本小题 14 分）

（I）解：

$$X(A,B)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}.$$ ……………………………………3 分

（II）**证明："$\Rightarrow$"**

若 $a_k+b_k=1\,(k=1,2,\cdots,n)$ ，由于 $x_{ij}=\begin{cases}1 & a_i=b_j,\\0 & a_i\ne b_j,\end{cases}$ $x_{ji}=\begin{cases}1 & a_j=b_i,\\0 & a_j\ne b_i,\end{cases}$

令 A: a_1, $a_2,\cdots$, a_n ，由此数列 B: $1-a_1$, $1-a_2,\cdots$, $1-a_n$.

由于 $a_i=b_j \Leftrightarrow a_i=1-a_j \Leftrightarrow a_i+a_j=1 \Leftrightarrow a_j=1-a_i \Leftrightarrow a_j=b_i$.

从而有 $x_{ij}=x_{ji}$ （$i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n; i\neq j$）.

"$\Leftarrow$"

若 $x_{ij}=x_{ji}$ （$i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n; i\neq j$）.

由于 A，B 是不同的数列，

(1) 设 $a_1=1$，$b_1=0$，对任意的正整数 $k>1$，

①若 $x_{1k}=x_{k1}=1$，可得 $a_1=b_k=1$，$a_k=b_1=0$，

所以 $a_k+b_k=1$.

②若 $x_{1k}=x_{k1}=0$，可得 $b_k=0$，$a_k=1$，

所以 $a_k+b_k=1$.

同理可证 $a_1=0$，$b_1=1$ 时，有 $a_k+b_k=1\ (k=1,2,\cdots,n)$ 成立.

(2) 设 $a_1=1$，$b_1=1$，对任意的正整数 $k>1$，

① 若 $x_{1k}=x_{k1}=1$，可得 $a_1=b_k=1$，$a_k=b_1=1$，

所以有 $a_k=b_k=1$，则 A，B 是相同的数列，不符合要求.

② 若 $x_{1k}=x_{k1}=0$，可得 $b_k=0$，$a_k=0$，

所以有 $a_k=b_k$，则 A，B 是相同的数列，不符合要求.

同理可证 $a_1=0$，$b_1=0$ 时，A，B 是相同的数列，不符合要求.

综上，有 $n\times n$ 数表 $X(A, B)$ 满足“$x_{ij}=x_{ji}$”的充分必要条件为“$a_k+b_k=1(k=1,2,\cdots,n)$”.

………11 分

（III）**证明：**由于数列 A，B 中的 1 共有 n 个，设 A 中 1 的个数为 p，

由此有，A 中 0 的个数为 $n-p$，B 中 1 的个数为 $n-p$，B 中 0 的个数为 p.

若 $a_i=1$，则数表 $X(A, B)$ 的第 i 行为数列 B：b_1，$b_2,\cdots$，b_n，

若 $a_i=0$，则数表 $X(A, B)$ 的第 i 行为数列 B：$1-b_1$，$1-b_2,\cdots$，$1-b_n$，

所以数表 $X(A, B)$ 中 1 的个数为

$$p(n-p)+(n-p)p=2p(n-p)\leq 2\left(\frac{p+(n-p)}{2}\right)^2=\frac{n^2}{2}.$$

所以 $n\times n$ 数表 $X(A, B)$ 中 1 的个数不大于 $\frac{n^2}{2}$.　　…………………………………14 分