2018北京人大附中高二（下）期末

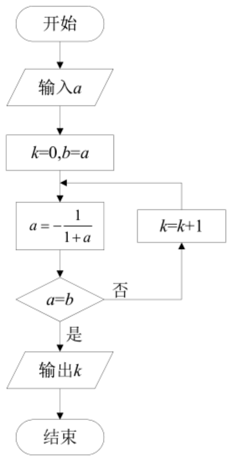
数　　学（文）

2018 年 7 月 5 日

制卷人：孙福明　　审卷人：梁丽萍　　成绩：

说明：本练习共**3** 道大题**20** 道小题，共**4** 页，满分**150** 分，考试时间**120** 分钟；

一、选择题（共8 道小题，每道小题5 分，共40 分.请将正确答案填涂在答题卡上.）



1．设集合A＝{1,2,3}，B＝{2,3,4}，则$A\cup B$＝(　A　)

A．{1,2,3,4}　　　　B．{1,2,3}

C．{2,3,4}　　　　D．{1,3,4}

2．设复数z=i·(1+i)（其中i 是虚数单位），则复数z 对应的点位于（ B ）

A．第一象限　　　　B．第二象限

C．第三象限　　　　D．第四象限

3．执行如图所示的程序框图，若输入的a 值为1，则输出的k 值为（B）

A.1　　　　B.2

C.3　　　　D.4

4．下列函数中，既是奇函数又在(0，＋∞)上单调递增的是(D)

A．$y=e^x+e^{-x}$　　　　B．$y=\ln(|x|+1)$

C．$y=\dfrac{\sin x}{|x|}$　　　　D．$y=x-\dfrac{1}{x}$

5．命题“若x，y 都是偶数，则$x+y$ 也是偶数”的逆否命题是(　C　)

A．若$x+y$ 是偶数，则x 与y 不都是偶数

B．若$x+y$ 是偶数，则x 与y 都不是偶数

C．若$x+y$ 不是偶数，则x 与y 不都是偶数

D．若$x+y$ 不是偶数，则x 与y 都不是偶数

6．已知$\lg a+\lg b=0$，则$\lg(a+b)$的最小值为(　A　)

A．$\lg 2$　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$-\lg 2$　　　　D．2

7．设U 为全集，A，B 是集合，则“存在集合C，使得$A\subseteq C$，$B\subseteq \complement_U C$”是“$A\cap B=\varnothing$” 的(　C　)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

8．已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}-k(\dfrac{2}{x}+\ln x)$，若$x=2$ 是函数$f(x)$的唯一的一个极值点，则实数k 的取值范围为(　A　)

A．(－∞，e]　　　　B．[0，e]

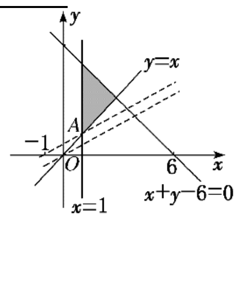
C．(－∞，e)　　　　D．[0，e)

二、填空题（共6 道小题，每道小题5 分，共30 分．请将正确答案填在答题卡上.）

9．若函数$f(x)$满足$f(\dfrac{2}{x})=\log_2 x$，则$f(2)$ = ________.

10．设定义在R 上的函数$f(x)$满足$f(x)=f(x+2)$；且当$0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=2^x-1$，则$f(\dfrac{5}{2})=$ ________

11.若实数x，y 满足约束条件$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-y\leq 0 \\ x+y-6\leq 0 \end{cases}$ 则$x-2y$ 的最大值为____________.



12. 若$f(x)=x\sin x+\cos x$，则$f(-3)$，$f(\frac{\pi}{2})$，$f(2)$的大小关系为________________________

13.已知函数$f(x)=x^2$，$g(x)=(\frac{1}{2})^x-m$，若对任意$x_1\in[0,2]$，存在$x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)\geq g(x_2)$，则实数m 的取值范围为______________

14．设函数$f(x)=a^x+b^x-c^x$，其中$c>a>0$，$c>b>0$.若a，b，c 是△ABC 的三条边长，给出下列命题：

①对于$\forall x\in(-\infty，1)$，都有$f(x)>0$；

②存在$x>0$，使a^x，b^x，c^x 不能构成一个三角形的三边长；

③若△ABC 为钝角三角形，则存在$x\in(1,2)$，使$f(x)=0$.

则其中所有正确结论的序号是___________________.

三、解答题（共6 道小题，共80 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.）

15. (本小题满分12 分)

已知集合$A=\{x|3\leqslant 3^x\leqslant 27\}$，$B=\{x|\log_2 x>1\}$.

(Ⅰ)求$A\cap B$，$(\complement_R B)\cup A$；

(Ⅱ)已知非空集合$C=\{x|1<x<a\}$，若$C\subseteq A$，求实数a 的取值范围．

16. （本小题满分12 分）

给定实数t，已知命题p：函数$f(x)=x^2-2tx+1$ 有零点；命题 q：$\forall x\in[1，+\infty)$ $\frac{1}{x}-x\leqslant 4t^2-1$.

(Ⅰ)当$t=1$ 时，判断命题q 的真假；

(Ⅱ)若$p\vee q$ 为假命题，求t 的取值范围．

17. (本小题满分13 分)

已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2-ax$，$x\in R$，其中$a>0$.

(Ⅰ)求函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)若函数$f(x)$（$x\in(-2,0)$）的图象与直线$y=a$ 有两个不同交点，求a 的取值范围．

18. (本小题满分 13 分)

某经销商计划销售一款新型的空气净化器，经市场调研发现以下规律：当每台净化器的利润为x（单位：元，$x>0$）时，销售量$q(x)$（单位：百台）与x 的关系满足：若x 不超过 20,则 $q(x)=\frac{1260}{x+1}$

若x 大于或等于 180 ,则销售量为零;当$20\leqslant x\leqslant 180$ 时，$q(x)=a-b\sqrt{x}$（a ，b 为实常数）

（Ⅰ）求函数$q(x)$ 的表达式;

（Ⅱ）当x 为多少时，总利润（单位：元）取得最大值，并求出该最大值.

（1）当$0<x\leqslant 20$ 时，$f(x)=\dfrac{126000x}{x+1}=126000-\dfrac{126000}{x+1}$

$f(x)$ 在$[0,20]$ 上单调递增，

所以当$x=20$ 时，$f(x)$ 有最大值 120000 . ························8

（2）当$20<x\leqslant 180$ 时，$f(x)=9000x-300\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}$，$f'(x)=9000-450\sqrt{5}\sqrt{x}$，

令$f'(x)=0$ ，得$x=80$.

当$20<x<80$ 时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 单调递增，当$80<x\leqslant 180$ 时，$f'(x)$ <0 ，$f(x)$ 单调递减，

所以当$x=80$ 时，$f(x)$ 有最大值240000 . ························11

（3）当 $180<x$ 时，$f(x)=0$. ························12

答：当x 等于 80 元时，总利润取得最大值240000 元. ························13

19. （本小题满分15 分）

已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-mx$ （m 为常数）

（Ⅰ）若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线斜率为$-1$ ，求实数m 的值.

（Ⅱ）求函数$f\left(x\right)$ 的极值.

（Ⅲ）证明：当$x>0$ 时，$\mathrm{e}^{x}>x^{2}$.

20.（本小题满分15 分）

已知函数$f(x)=ax-\ln x$，$x\in(0，\mathrm{e}]$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，其中e 是自然对数的底数，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当$a=1$ 时，求$f(x)$的单调区间;

(Ⅱ)设函数$\boldsymbol{F(x)=x^{2}\cdot g(x)-f(x)-\ln x+a}$ ，

①求函数$F(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值;

②求证：$a>1$ 是函数$F(x)$有两个零点的充分条件.

数学试题答案

一、选择题（共8 道小题，每道小题5 分，共40 分.请将正确答案填涂在答题卡上.）

1．

解析：由题意得$A\cup B$＝{1,2,3,4}.

2.

解析： z=i(1+i)=−1+ i

3.

解析： k=0,b=1，进入循环体， $a=-\frac{1}{2}$，否；k=1,a=-2，否；k=2,a=1,此时a=b=1，输出k，k=2.

4.

解析：选项A，B 显然是偶函数，排除；选项C 是奇函数，但在(0，＋∞)上不是单调递增函数，不符合题意；选项D 中，$y=x-\frac{1}{x}$是奇函数，且y＝x 和$y=-\frac{1}{x}$在(0，＋∞)上均为增函数，

故$y=x-\frac{1}{x}$在(0，＋∞)上为增函数，所以选项D 正确.

5.

解析： “都是”的否定是“不都是”，故其逆否命题是:“若x＋y 不是偶数，则x 与y 不都是偶数.”

6

解析： 由lg a＋lg b＝0，可知a>0，b>0，

则lg(ab)＝0，即ab＝1.

所以a＋b≥2 $\sqrt{ab}$＝2，当且仅当a＝b＝1 时取等号， 所以lg(a＋b)≥lg 2.

故lg(a＋b)的最小值为lg 2.

7．

解析：依题意，若$A\subseteq C$，则$\complement_U C\subseteq\complement_U A$，若$B\subseteq\complement_U C$，可得$A\cap B=\varnothing$；若$A\cap B=\varnothing$，不 妨令$C$＝$A$，显然满足$A\subseteq C$，$B\subseteq\complement_U C$，故满足条件的集合 C 是存在的.

8.

解析：函数$f(x)$的定义域是(0，＋∞)，

所以$f'(x)=\frac{(\frac{e^x}{x}-k)x-2}{x^2}$

因为 x＝2 是函数 $f(x)$的唯一一个极值点， 所以 x＝2 是导函数 $f'(x)$＝0 的唯一根.

所以$\frac{e^x}{x}-k=0$在(0，＋∞)上无变号零点.

设$g(x)=\frac{e^x}{x}$，则$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，当$x\in(1，+\infty)$时，$g'(x)>0$， 所以$g(x)$在(0,1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，

所以$g(x)_{\min}$＝$g(1)$＝e，结合$g(x)=\frac{e^x}{x}$与y＝k 的图象知，若x＝2 是函数$f(x)$的唯一一个极值点，则应需k≤e.

二、填空题（共6 道小题，每道小题5 分，共30 分. 请将正确答案填在答题卡上.）

9.

解析：令x=1，$\boldsymbol{f(2)=\log_2 1=0}$

10. _

解析：$f(\frac{5}{2})=f(\frac{1}{2})=\sqrt{2}-1$

11.

解析：画出可行域如图中阴影部分所示，令$z=x-2y$，可知$z=x-2y$ 在点$A(1,1)$处取得最大值-1.

12. $f(\frac{\pi}{2})\succ f(2)\succ f(-3)$

解析：函数$f(x)$为偶函数，因此$f(-3)=f(3)$．　又$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，$f'(x)\leqslant 0$. 所以$f(x)$在区间上是减函数，

所以 $f(\frac{\pi}{2})\succ f(2)\succ f(-3)$

13.

$m\geq\frac{1}{4}$

解析：对任意$x_1\in[0,2]$，存在$x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)\geq g(x_2)$等价于$g(x)=(\frac{1}{2})^x-m$在$[1,2]$上的最小值$\frac{1}{4}-m$不大于$f(x)=x^2$ 在$[0,2]$上的最小值0，$\frac{1}{4}-m\leq 0$ $\therefore m\geq\frac{1}{4}$

14.

解析：　①因为a，b，c 是$\triangle ABC$ 的三条边长，所以$a+b>c$，因为$c>a>0$，$c>b>0$，所以

$0\prec\frac{a}{c}\prec 1$，$0\prec\frac{b}{c}\prec 1$，当 $x\in(-\infty，1)$时，$f(x)=a^x+b^x-c^x=c^x((\frac{a}{c})^x+(\frac{b}{c})^x-1)$

$\succ c^x(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1)=c^x\cdot\frac{a+b-c}{c}\succ 0$，故①正确；

②令$a=2$，$b=3$，$c=4$，则a，b，c 可以构成三角形，但$a^2=4$，$b^2=9$，$c^2=16$ 却不能 构成三角形，所以②正确；

③已知 $c>a>0$，$c>b>0$，若$\triangle ABC$ 为钝角三角形，则 $a^2+b^2-c^2<0$，因为 $f(1)=a+b-c>0$，$f(2)=a^2+b^2-c^2<0$，根据零点的存在性定理可知在区间$(1,2)$上存在零点，所以存在 $x\in(1,2)$，使$f(x)=0$，故③正确.

三、解答题（共6 道小题，共80 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.

解：(Ⅰ)$\because 3\leqslant 3^x\leqslant 27$，即 $3^1\leqslant 3^x\leqslant 3^3$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 3$，

$\therefore A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$.　……………………2

$\because \log_2 x>1$，即$\log_2 x>\log_2 2$，$\therefore x>2$，$\therefore B=\{x|x>2\}$.　……………………4

$\therefore A\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}$.　……………………6

$\because \complement_R B=\{x|x\leqslant 2\}$，

$\therefore (\complement_R B)\cup A=\{x|x\leqslant 3\}$.　……………………9

(Ⅱ)由(1)知$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，

$\because C\subseteq A$，$\therefore 1<a\leqslant 3$.

$\therefore$实数a 的取值范围是$1<a\leqslant 3$.　……………………12

16.

解：(Ⅰ)当$t=1$ 时，$(\frac{1}{x}-x)_{\max}=0$……………………3

$\frac{1}{x}-x\leqslant 3$ 在$[1，+\infty)$上恒成立，故命题q 为真命题.　……………………5

(Ⅱ)若$p\vee q$ 为假命题，则p，q 都是假命题.　　　　　　　　　　　　　　　　……………………6

当p 为假命题时，$\Delta=(-2t)^2-4<0$，解得$-1<t<1$；　　　　……………………8

当q 为真命题时，$(\frac{1}{x}-x)_{\max}\leqslant 4t^2-1$，即 $4t^2-1\geqslant 0$，解得$t\leqslant -\frac{1}{2}$或$t\geqslant\frac{1}{2}$

∴当q 为假命题时，$-\frac{1}{2}\prec t\prec\frac{1}{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　……………………10

∴t 的取值范围是$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　　　　　　　　　　　　　　　……………………12

17.

解：(Ⅰ)$f'(x)=x^2+(1-a)x-a=(x+1)(x-a)$.　　　　　　　　……………………1

由$f'(x)=0$，得$x_1=-1$，$x_2=a>0$.　　　　　　　　　　　　　　……………………2

当x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty，-1)$	-1	$(-1，a)$	a	$(a，+\infty)$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

……………………3

故函数$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty，-1)$，$(a，+\infty)$；

单调递减区间是$(-1，a)$.　　　　　　　　　　　　　　……………………6 (Ⅱ) 令 $g(x)=f(x)-a$，

$x\in(-2,0)$，

则函数$g(x)$在区间$(-2,0)$内有两个不同的零点，　　　　　　……………………8

由(Ⅰ)知$g(x)$在区间$(-2，-1)$内单调递增，在区间$(-1，0)$内单调递减，

从　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　而

$$\begin{cases} g(- & \prec \\ g(- & \succ \\ g(& \prec \end{cases}$$　　　　　　　　　　　　　　　　……………

………11

解得$0<a<\frac{1}{3}$.　　所以a 的取值范围是$(0,\ \frac{1}{3})$　　　　……………………13

18.

解:(Ⅰ) 当$20\leqslant x\leqslant 180$ 时，

由$\begin{cases} a-b\cdot\sqrt{20}=60, \\ a-b\cdot\sqrt{180}=0, \end{cases}$得$\begin{cases} a=90, \\ b=3\sqrt{5}. \end{cases}$　　　　　　　　……………………2

故$q(x)=\begin{cases} \frac{1260}{x+1}, & 0<x\leqslant 20, \\ 90-3\sqrt{5}\sqrt{x}, & 20<x\leqslant 180, \\ 0, & x>180 \end{cases}$　　　　　　　　……………………6

(Ⅱ) 设总利润$f(x)=x\cdot q(x)$，

由(Ⅰ)得$f(x)=\begin{cases} \frac{126000x}{x+1}, & 0<x<20, \\ 9000x-300\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}, & 20\leqslant x\leqslant 180, \\ 0, & x>180 \end{cases}$

（1）当$0<x\leqslant 20$ 时， $f(x)=\dfrac{126000x}{x+1}=126000-\dfrac{126000}{x+1}$

$f(x)$ 在 $[0,20]$ 上单调递增，
所以当$x=20$ 时， $f(x)$ 有最大值 120000 ．　　………………………8
（2）当$20<x\leqslant 180$ 时， $f(x)=9000x-300\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}$ ， $f'(x)=9000-450\sqrt{5}\sqrt{x}$ ，
令 $f'(x)=0$ ，得$x=80$ ．

当$20<x<80$ 时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 单调递增， 当$80<x\leqslant 180$ 时，$f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减，

所以当$x=80$ 时，$f(x)$ 有最大值240000 ．　　………………………11

（3）当 $180<x$ 时，$f(x)=0$ ．　　………………………12

答：当x 等于 80 元时，总利润取得最大值240000 元．………………………13

19.

【解】(Ⅰ) $f'(x)=e^x-m$ ，　　………………………1
由已知，得 $f'(0)=-1$，$e^0-m=-1$，解得$m=2$ ．　　………………………2
(Ⅱ) 令 $f'(x)=0$ ，得$x=\ln m$.　　………………………3

列表如下：

x	$(-\infty，\ln m)$	$\ln m$	$(\ln m，+\infty)$
$f(x)$	－	0	+
$f(x)$	↘	极小值$f(\ln m)$	↗

∴函数 $f(x)$ 在$(-\infty,\ln m)$ 上是减函数，在$(\ln m,+\infty)$ 上是增函数，
………………………5

∴ $f(x)$ 的极小值为$f(\ln m)=m-m\ln m$ ，无极大值．　　………………………7

(Ⅲ) 令 $g(x)=e^x-x^2$ ，　　………………………8 则 $g'(x)=e^x-2x$ ，　　………………………9 由（2）可知，$g'(x)_{\min}=2-2\ln 2=2-\ln 4>0$ ，　　………………………11

∴ $g'(x)>0$ 恒成立，

∴ $g(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递增，　　………………………13

∴ $g(x)>g(0)=1>0$ ，　即$e^x-x^2>0$ ，

故当$x>0$ 时，$e^x>x^2$ ．　　………………………15

20.

解：(Ⅰ)∵$f(x)=x-\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$　　………………………1

∴当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，此时$f(x)$单调递减； 当 $1<x<e$ 时，$f'(x)>0$，此时$f(x)$单调递增.
∴$f(x)$的单调增区间为$(1,e)$，单调减区间为$(0,1)$.　　………………………3
(Ⅱ)$F(x)=x\ln x-ax+a$，

①$F'(x)=\ln x+1-a$， 令$F'(x)=0$，得$x=e^{a-1}$， ……………………5

所以在区间$(0, e^{a-1})$上，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，在区间$(e^{a-1}, +\infty)$上，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增.

（ⅰ）当$e^{a-1}\le 1$，即$0<a\leqslant 1$时，在区间[1，e]上，$F(x)$单调递增，所以$F(x)$最大值 为$F(e)=e+a-ae$； ……………………6

（ⅱ）当$e^{a-1}\ge e$，即$a\geqslant 2$时，在区间[1，e]上，$F(x)$单调递减，所以$F(x)$最大值为$F(1)=0$. ……………………7

（ⅲ）当$1<e^{a-1}<e$，即$1<a<2$时，$F(x)$的最大值为$F(e)$和$F(1)$中较大者：

令$F(e)-F(1)=e+a-ae>0$，解得$a<\dfrac{e}{e-1}$

所以当$1<a<\dfrac{e}{e-1}$时，$F(x)$最大值为$F(e)=e+a-ae$，当$\dfrac{e}{e-1}\le a<2$时，$F(x)$最大值为$F(1)=0$

综上所述，当$0<a<\dfrac{e}{e-1}$时，$F(x)$最大值为$F(e)=e+a-ae$，

当$a\ge\dfrac{e}{e-1}$时，$F(x)$最大值为$F(1)=0$. ……………………10

②“函数$F(x)$有两个零点”等价于“方程$x\ln x-ax+a=0$ 两个根,”由于$x>0$，也等价于 “函数 $G(x)=\ln x-a+\dfrac{a}{x}$有两个零点”. ……………………11

则$G'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}$

当$a>0$时，令$G'(x)>0$得$x>a$，令$G'(x)<0$得$x<a$

即函数$G(x)$的单调递增区间为$(a,+\infty)$，单调递减区间为$(0,a)$，

因此，$G(x)_{\min}=G(a)=\ln a-a+1\leqslant 0$.. ……………………13

又$G(1)=0$，

当$a>1$时，由于$G(a)<0$，$G(e^a)=\dfrac{a}{e^a}>0$，故函数$G(x)$有两个零点

所以$a>1$是函数$F(x)$有两个零点的充分条件.