2018 北京师大附中高二（下）期末

数　　学（文）

2018.07

说明：本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

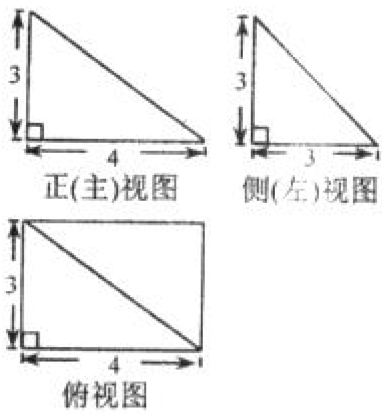
1. 若全集 U={1, 2, 3, 4, 5}，集合 A={1, 3}，B={3, 4}，那么集合$(C_U A)\bigcap(C_U B)$等于（　　）

A. {2}　　B. {2, 5}　　C. {3}　　D. {1, 3, 4}

2. 设命题 p：函数 $f(x)=e^{x-1}$ 在 R 上为增函数；命题 q：函数 $f(x)=\cos 2x$ 为奇函数. 则下列命题中真命题是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $(\neg p)\wedge q$　　C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\wedge(\neg q)$

3. 一个四棱锥的三视图如图所示，则这个几何体的体积是（　　）



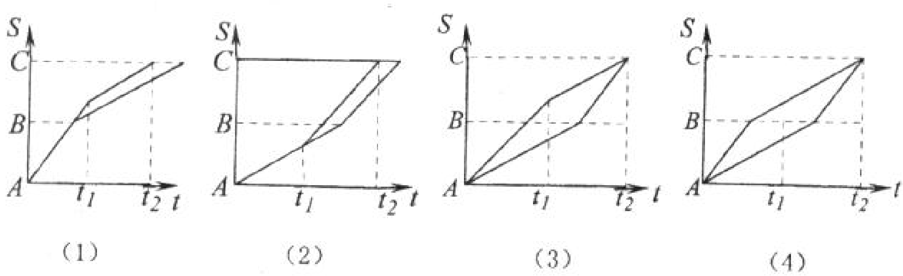
A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 36

4. 已知函数 $f(x)=-x^2+4x+a$ 在区间[-3, 3]上存在 2 个零点，求实数 a 的取值范围（　　）

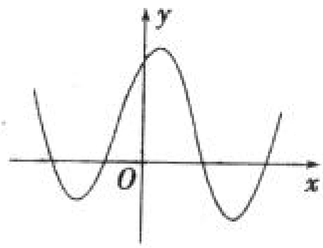
A. (-4, 21)　　B. [-4, 21]　　C. (-4, -3]　　D. [-4, -3]

5. 甲、乙两人沿同一方向去 B 地，途中都使用两种不同的速度 v_1, v_2 $(v_1<v_2)$. 甲一半路程使用速度 v_1，另一半路程使用速度 v_2，乙一半时间使用速度 v_1，另一半时间使用速度 v_2，甲、乙两人从 A 地到 B 地的路程与时间的函数图象及关系，有下面图中 4 个不同的图示分析（其中横轴 t 表示时间，纵轴 S 表示路程），其中正确的图示分析为（　　）

A. （1）　　B. （3）　　C. （1）或（4）　　D. （1）或（2）



6. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R，导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$（　　）



A. 无极大值点，有四个极小值点

B. 有三个极大值点、两个极小值点

C. 有两个极大值点、两个极小值点

D. 有四个极大值点、无极小值点

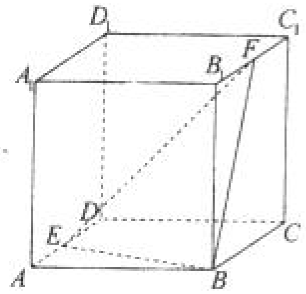
7. 设 $f(x)$、$g(x)$ 是 R 上的可导函数，$f'(x)$，$g'(x)$ 分别为 $f(x)$、$g(x)$ 的导函数，且满足 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有（　　）

A. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　B. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

C. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　D. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

8. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别是棱 AD，B_1C_1 上的动点，设 AE=x，B_1F=y. 若棱 DD_1 与平面 BEF 有公共点，则 $x+y$ 的取值范围是（　　）

A. $[1,2]$　　B. $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　C. $[\frac{3}{2},2]$　　D. $[0,1]$



二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9. 设复数 z 满足 $(1+i)z=i$，则 $|z|=$______.

10. 设 $a=\log_3 2$，$b=\log_2 3$，$c=\log_2 0.3$，请将实数 a，b，c 从小到大排列_______.

11. 将 $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ 图象上各点的横坐标缩短道原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），再将图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到的函数的解析式为_______________.

12. 过点（-1，-2）的直线 l 被圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}$，则直线 l 的斜率为___________.

13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 作与 x 轴垂直的直线与双曲线一个交点为 P，且 $\angle PF_1F_2=\dfrac{\pi}{6}$，则双曲线的渐近线方程为__________.

14. 定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”.

（1）设 $f(x)=\cos x$，则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的“新驻点”为_________.

（2）如果函数 $g(x)=x$ 与 $h(x)=\ln(x+1)$ 的“新驻点”分别为 α 、β，那么 α 和 β 的大小关系是___________.

三、解答题（共 80 分，请写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15.（13 分）已知条件 $p: x\in A=\left\{x\,|\,x^2-2x-3\le 0, x\in R\right\}$，

条件 $q: x\in B=\left\{x\,|\,x^2-2mx+m^2-4\le 0, x\in R, m\in R\right\}$.

（1）若 $A\cap B=[0,3]$，求实数 m 的值；

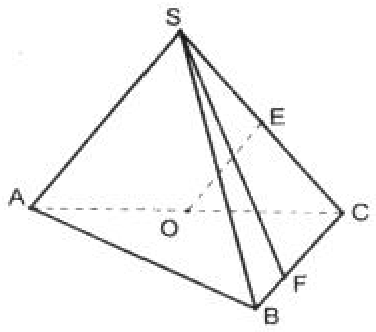
（2）若 $\neg p$ 是 q 的必要条件，求实数 m 的取值范围.

16. （14 分）如图，在三棱锥 S-ABC 中，侧面 SAC 与底面 ABC 垂直，E，O 分别是 SC，AC 的中点，$SA=SC=\sqrt{2}$，$BC=\frac{1}{2}AC$，$\angle ASC=\angle ACB=90^\circ$.

（1）求证：OE∥平面 SAB；

（2）若 F 是线段 BC 上的任意一点，求证：OE⊥SF；

（3）求三棱锥 S-ABC 的体积.



17. （13 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x(a\in R)$.

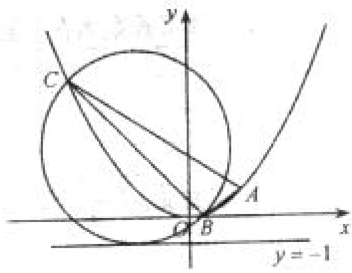
（I）若 $a=0$，求曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）当 $a>0$ 时，讨论函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x$ 的单调区间.

18. （13 分）已知抛物线 $W:y=ax^2$ 经过点 A（2，1），过 A 作倾斜角互补的两条不同直线 l_1,l_2.

（I）求抛物线 W 的方程及准线方程；

（II）设直线 l_1,l_2 分别交抛物线 W 于 B，C 两点（均不与 A 重合，如图），记直线 AB 的斜率为正数 k，若以线段 BC 为直径的圆与抛物线的准线相切，求 k 的值.



19. （13 分）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行.

（I）求实数 a 的值；

（II）设 $b>1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

20. （14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，F 为右焦点，圆 O：$x^2+y^2=1$，P 为椭圆 C 上一点，且 P 位于第一象限，过点 P 作 PT 与圆 O 相切于点 T，使得点 F，T 在 OP 的两侧.

（I）求椭圆 C 的焦距及离心率.

（II）求四边形 OFPT 面积的最大值.

2018 北京师大附中高二（下）期末数学（文）参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	B	C	D	C	A	A

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分。）

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　10. $c<a<b$；　　11. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{2})=-\cos 2x$；

12. 1 或$\frac{17}{7}$；　　13. $y=\pm\sqrt{2}x$；　　14. $\frac{3\pi}{4}$；$\alpha>\beta$；

三、解答题（共 80 分，请写在必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 解：（1）$A=\{x\mid -1\le x\le 3, x\in R\}$，

$B=\{x\mid m-2\le x\le m+2, x\in R, m\in R\}$，

$\because A\cap B=[0,3]$，$\therefore$m=2.

（2）$\because \neg p$ 是 q 的必要条件，$\therefore$p 是$\neg q$ 的充分条件

又$\because A=\{x\mid -1\le x\le 3, x\in R\}$，

$\neg q$ 表示的范围用集合 C 表示，则 $C=\{x\mid x<m-2\text{或}x>m+2\}$，

$\therefore A\subseteq C$，则 $m+2<-1$ 或 $m-2>3$，解得 $m<-3$，或 $m>5$.

所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid m<-3,\text{或}m>5\}$.

16. 解：（1）∵E，O 分别是 SC，AC 的中点∴OE∥SA

又∵OE⊄平面 SAB　　∴OE∥平面 SAB

（2）在△SAC 中，∵OE∥AS，∠ASC=90°　∴OE⊥SC

∵平面 SAC⊥平面 ABC，∠BCA=90°　∴BC⊥平面 ASC，OE⊂平面 ASC

∴BC⊥OE　　∴OE⊥平面 BSC　　∵SF⊂平面 BSC　　∴OE⊥SF

（3）$V_{S-ABC}=\dfrac{1}{3}$（过程略）

17. 解：（I）若 $a=0$，$f(x)=-x+\ln x$，导函数为 $f'(x)=-1+\dfrac{1}{x}$.

依题意，有 $f(1)=-1, f'(1)=0$，

则切线方程为 $y+1=0(x-1)$，即 $y+1=0$.

（II）$f'(x)=ax-(a+1)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}(x>0)$，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}=0$，得 $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{a}$，再讨论两根的大小关系；

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 或者 $x>1$，则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(1,+\infty)$，减区间是 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$；

当 $a=1$ 时，$\dfrac{1}{a}=1$，则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,+\infty)$，没有减区间；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或者 $x>\dfrac{1}{a}$，则函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1）和 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，减区间是 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$；

综上，当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(1,+\infty)$，减区间是 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 增区间是 $(0,+\infty)$，没有减区间；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1）和 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，减区间是 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$；

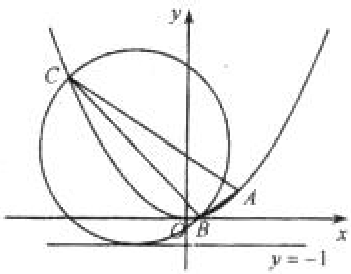
18. 解：（I）由于 A（2, 1）在抛物线 $y=ax^2$ 上，所以 $1=4a$，即 $a=\dfrac{1}{4}$.

故所求抛物线的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，其准线方程为 $y=-1$.

（II）设直线 AB 的方程为 $y-1=k(x-2)\ (k>0)$，

由 $\begin{cases} y-1=k(x-2) \\ y=\dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$ 得 $x^2-4kx+8k-4=0$，

易知该方程有一个根为 2，所以另一个根为 $4k-2$，



所以点 B 的坐标为 $(4k-2,4k^2-4k+1)$，

同理可得 C 点坐标为 $(-4k-2,4k^2+4k+1)$，

所以 $|BC|=\sqrt{[(4k-2)-(-4k-2)]^2+[(4k^2-4k+1)-(4k^2+4k+1)]^2}$

$=\sqrt{(8k)^2+(-8k)^2}=8\sqrt{2}k$，

线段 BC 的中点为 $(-2,4k^2+1)$，因为以 BC 为直径的圆与准线 $y=-1$ 相切，

所以 $4k^2+1-(-1)=4\sqrt{2}k$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19. 解：（I）$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$，所以 $f'(1)=1-a$.

依题意，有 $f'(1)=0$，即 $1-a=0$，解得 $a=1$.

（II）由（I）得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间（0, 1）上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $0<\dfrac{1}{b}<1<b$，所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1)=-1$.

设 $h(b)=f(b)-f(\frac{1}{b})=(b+\frac{1}{b})\ln b-b+\frac{1}{b}$，其中 $b>1$.

则 $h'(b)=(1-\frac{1}{b^2})\ln b>0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(b)>h(1)=0$，即 $f(b)>f(\frac{1}{b})$，

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\frac{1}{b})=-b\ln b-\frac{1}{b}$.

20. 解：（1）在椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，$a=2,b=1$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

故椭圆 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，

则 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，故 ${y_0}^2=1-\frac{{x_0}^2}{4}$.

所以 $|TP|^2=|OP|^2-|OT|^2=x_0^2+y_0^2-1=\frac{3}{4}x_0^2$，所以 $|TP|=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$S_{\Delta OTP}=\frac{1}{2}|OT|\cdot|TP|=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0$.

又 $O(0,0)$，$F(\sqrt{3},0)$，故 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}y_0$.

因此 $S_{\text{四边形 OFPT}}=S_{\triangle OFP}+S_{\triangle OTP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{x_0}{2}+y_0)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{{x_0}^2}{4}+x_0y_0+{y_0}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}$.

由 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，得 $2\sqrt{\frac{x_0^{\ 2}}{4}\cdot y_0^{\ 2}}\le 1$，即 $x_0\cdot y_0\le 1$，

所以 $S_{四边形\ OFPT}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}=y_0^{\ 2}=\frac{1}{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

故四边形 OFPT 面积的最大值是 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.