2023北京五十五中高二12月月考

数　　学

本试卷共4页，共150分，调研时长120分钟

第一部分（选择题 共50分）

一、选择题：

1. 已知数列$\{a_n\}$是一个等差数列，$a_3=2$，公差$d=-\frac{1}{2}$，则其首项$a_1=$（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

2. 下列求导数运算中正确的是（　）

A. $(4)'=2$

B. $(\ln x)'=\frac{1}{x\ln 10}$

C. $(3^x)'=x\cdot 3^{x-1}$

D. $(x^5)'=5x^4$

3. 双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为（　）

A. $y=\pm\frac{3}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{4}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{3}{5}x$　　D. $y=\pm\frac{9}{16}x$

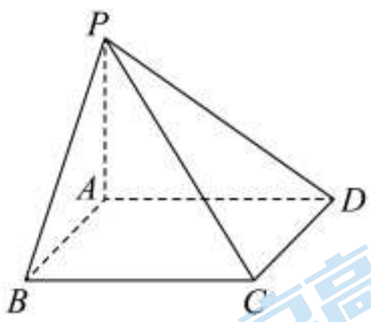
4. 某物体的位移s（米）与时间t（秒）的关系为$s=t^2-t$，则该物体在$t=2$时的瞬时速度是

A. 2米/秒　　B. 3米/秒　　C. 5米/秒　　D. 6米/秒

5. 已知空间三点$A(1,-1,2),B(3,0,-1),C(2,3,-3)$，则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 我国古代数学名著《九章算术》中，将底面为矩形且一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马.已知四棱锥$P-ABCD$是阳马，$PA\perp$平面$ABCD$，且$\overrightarrow{PE}=3\overrightarrow{EC}$，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AP}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{DE}=$（　）



A. $\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$

B. $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$

C. $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

D. $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

7. 设等比数列的$\{a_n\}$的前n项和是S_n，则“$a_1>0$”是“$S_3>S_2$”的

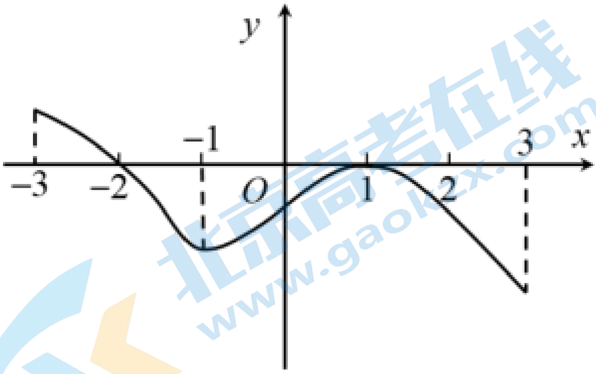
A. 充要条件　　　　　　　　　　　　　　B. 充分而不必要条件

C. 必要不充分条件　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 2022 北京冬奥会开幕式将我国二十四节气融入倒计时，尽显中国人之浪漫．倒计时依次为：大寒、小寒、冬至、大雪、小雪、立冬、霜降、寒露、秋分、白露、处暑、立秋、大暑、小暑、夏至、芒种、小满、立夏、谷雨、清明、春分、惊蛰、雨水、立春，已知从冬至到夏至的日影长等量减少，若冬至、立冬、秋分三个节气的日影长之和为 31.5 寸，问大雪、寒露的日影长之和为（　）

A. 21 寸　　　　B. 20.5 寸　　　　C. 20 寸　　　　D. 19.5 寸

9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中正确的是（　）



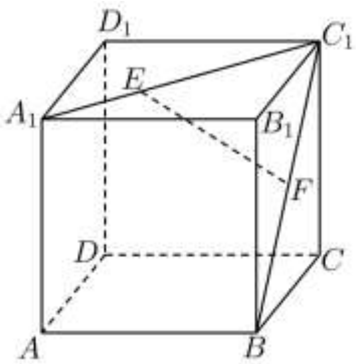
A. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线斜率小于零

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 内至多有两个零点

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 为线段 BC_1 的中点，E 为线段 A_1C_1 上的动点，则下列四个结论正确的是（　）



A. 存在点 E，使 $EF \parallel BD$

B. 三棱锥 B_1-ACE 的体积随动点 E 变化而变化

C. 直线 EF 与 AD_1 所成的角不可能等于 60°

D. 存在点 E，使 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题：

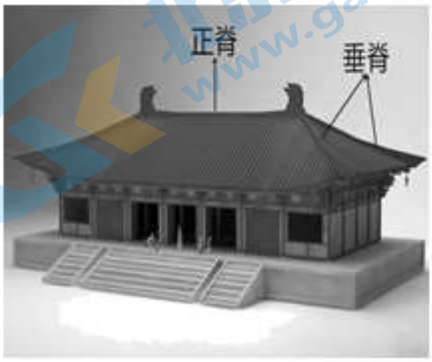
11. 某大学餐饮中心为了解新生的饮食习惯，在全校大一新生中进行了抽样调查．已知在被调查的新生中有 5 名数学系的学生，其中 2 名喜欢甜品现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人、则抽到的 3 人中有人喜欢甜品的概率为_________.

12. 求直线 $x=-2$ 与直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的夹角为________.

13. 已知长方形 $ABCD$ 中，AB=4，BC=3，则以 A、B 为焦点，且过 C、D 的椭圆的离心率为______.

14. 已知点 M（4，2），F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在抛物线上移动，当|PM|+|PF|最小时，点 P 的坐标为__________________.

15. （图 1）庑殿顶是中国古代建筑一种官式建筑，而且等级是最高的，如故宫的英华殿．它屋面有四面坡， 前后坡屋面全等且相交成一条正脊，两山屋面全等与前后屋面相交成四条垂脊．由于屋顶四面斜坡，也称“四阿顶”；（图 2）是庑殿顶的顶盖几何模型图，底面 $ABCD$ 是矩形，若四个侧面与底面所成的角均相等， 已知 $BC=2, EF=1$，则 $AB=$_______________



庑殿顶　图1

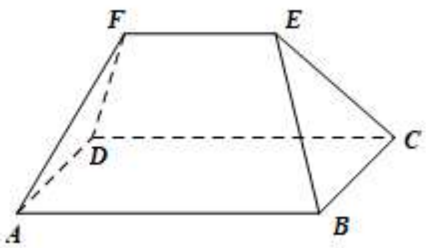


图2

16. 已知点 $P(2,0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=36$ 上两个不同的点 M， N，满足 $\angle MPN=90°$， Q 是弦 MN 的中点，

给出下列四个结论：

①$|MP|$的最小值是 4；

②点 Q 的轨迹是一个圆；

③若点 $A(5,3)$，点 $B(5,5)$，则存在点 Q，使得 $\angle AQB=90°$；

④△ MPN 面积的最大值是 $18+2\sqrt{17}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题：

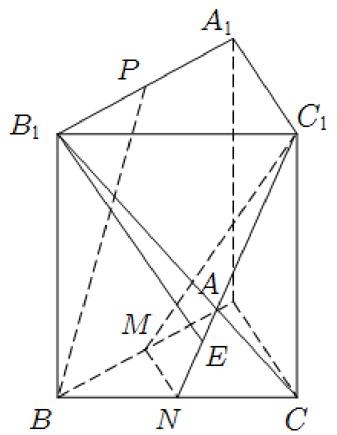
17. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，$a_2=-3$，且 a_2 是 a_3+4 与 a_5 的等比中项.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

（3）求$\{a_n\}$的前 n 项和S_n的最小值.

18. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，M，N，P 分别为AB,BC,A_1B_1的中点.



（1）求证：$BP//$平面C_1MN；

（2）若$AB\perp AC,AA_1=AB=AC=2$，求直线B_1C与平面C_1MN所成角的正弦值；

（3）在（2）的条件下，在C_1N上是否存在一点 E，使得B_1E与 BP 垂直？若存在，求出$\dfrac{NE}{NC_1}$的值；若不存在，说明理由.

19. 已知椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，右焦点为 F，点 A（a，0），且$|AF|=1$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 F 的直线 l（不与 x 轴重合）交椭圆 C 于点 M，N，直线 MA，NA 分别与直线 $x=4$ 交于点 P，Q，求$\angle PFQ$的大小.

20. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

（1）求曲线$y=f(x)$在$(1,0)$处的切线方程；

（2）求函数$g(x)$的最大值；

（3）当$x>0$时，证明：$g(x)-f(x)<\dfrac{2}{e}$.

21. 若数列$\{a_n\}$满足：$a_n\in\{0,1\},n\in\mathrm{N}^*$，且$a_1=1$，则称$\{a_n\}$为一个 X 数列．对于一个 X 数列$\{a_n\}$，若数列$\{b_n\}$满足：$b_1=1$，且$b_{n+1}=\left|a_n-\dfrac{a_{n+1}}{2}\right|b_n,n\in\mathrm{N}^*$，则称$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的伴随数列.

（1）若 X 数列$\{a_n\}$中，$a_2=1,a_3=0,a_4=1$，写出其伴随数列$\{b_n\}$中b_2,b_3,b_4的值；

（2）若$\{a_n\}$为一个 X 数列，$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的伴随数列

①证明：“$\{a_n\}$为常数列”是“$\{b_n\}$为等比数列的充要条件；

②求 b_{2023} 的最大值.

参考答案

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：

1.【答案】A

【分析】根据等差数列基本量的计算即可求出.

【详解】$\because a_3=a_1+2d=2$，公差 $d=-\dfrac{1}{2}$，

则 $a_1=a_3-2d=2+1=3$.

故选：A.

2.【答案】D

【分析】根据初等函数的导数公式即可判断.

【详解】对 A，$(4)'=0$，故 A 错误；

对 B，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，故 B 错误；

对 C，$(3^x)'=\ln 3\cdot 3^x$，故 C 错误；

对 D，$(x^5)'=5x^4$，故 D 正确；

故选：D.

3.【答案】A

【分析】根据双曲线的方程求出 a,b 的值，代入渐近线方程 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 即可.

【详解】因为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$，所以 $a=4,b=3$，

所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{3}{4}x$.

故选：A

4.【答案】B

【分析】根据导数的物理意义，求导后代入 $t=2$ 即可.

【详解】由 $s=t^2-t$ 得：$s'=2t-1$　$\therefore$ 当 $t=2$ 时，$s'=3$

即该物体在 $t=2$ 时的瞬时速度为：3 米/秒

本题正确结果：B

【点睛】本题考查导数的物理意义，属于基础题.

5.【答案】C

【分析】根据已知求出 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}$，进而根据数量积以及模的坐标运算，即可求出答案.

【详解】由已知可得 $\overrightarrow{AB}=(2,1,-3)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-3,2)$，

所以$\cos\left\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\dfrac{1}{2}$.

又$\left\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle\in[0,\pi]$,

所以$\left\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】结合已知条件，根据空间向量的线性运算法则求解即可.

【详解】因为$\overrightarrow{PE}=3\overrightarrow{EC}$，所以$\overrightarrow{PE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{PC}=\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AP}$.

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$，所以$\overrightarrow{PE}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{3}{4}\vec{c}$.

因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$,

所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$.

故选：D.

7.【答案】A

【分析】先化解$S_3>S_2$，再根据公比范围以及不等式性质确定选项.

【详解】设等比数列的$\{a_n\}$的公比为q，则$q\neq0$，所以$S_3>S_2\Leftrightarrow a_3>0\Leftrightarrow a_1q^2>0\Leftrightarrow a_1>0$，

即“$a_1>0$”是“$S_3>S_2$”的充要条件，选A.

【点睛】本题考查等比数列通项公式以及不等式性质，考查基本分析化简能力，属基本题.

8.【答案】A

【分析】由题意可得日影长可构成等差数列$\{a_n\}$，且$a_1+a_4+a_7=31.5$可求出a_4，从而可求出大雪、寒露的日影长之和为$a_2+a_6=2a_4$.

【详解】因为从冬至到夏至的日影长等量减少，

所以日影长可构成等差数列$\{a_n\}$,

因为冬至、立冬、秋分三个节气的日影长之和为31.5，

所以$a_1+a_4+a_7=31.5$，则$3a_4=31.5$，得$a_4=10.5$,

所以大雪、寒露的日影长之和为$a_2+a_6=2a_4=2\times10.5=21$（寸），

故选：A

9.【答案】D

【分析】根据导函数的图象,可判断原函数的单调性,进而可逐一求解.

【详解】根据 $f'(x)$ 图像可知 $f'(-2)=0$，故 $y=f(x)$ 在点 $(-2,f(-2))$ 处的切线斜率等于零，A 错误；

$f'(x)<0$ 在 $(-1,1)$，故 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，故 B 错误，在 $x=1$ 的左右两侧 $f'(x)<0$，故 $x=1$ 不是极值点，故 C 错误，$f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 单调递增，在 $(-2,3)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 内至多有两个零点，D 正确；

故选：D

10. 【答案】D

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量来表达出 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD_1}$，从而判断 AC 选项；求出平面 AB_1C_1D 的法向量 $\vec{n}=(0,1,-1)$，判断 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\vec{n}=(0,1,-1)$ 的关系，判断 D 选项；B 选项可以判断出 A_1C_1 // 平面 ACB_1，从而得到 E 到平面 ACB_1 的距离不变，所以 V_{E-ACB_1} 为定值，不随 E 的变动而变动，故三棱锥 B_1-ACE 的体积不随动点 E 变化而变化，B 选项错误.

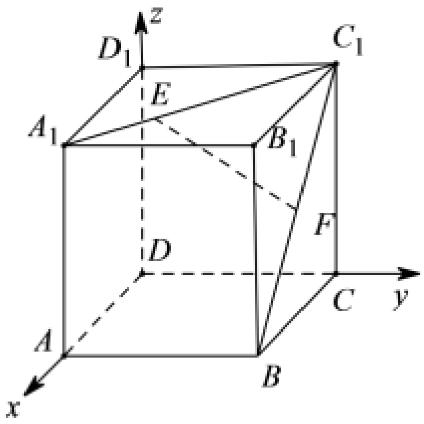
【详解】以点 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设正方体边长为 2，则 $F(1,2,1)$，$D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$A(2,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，因为 E 为线段 A_1C_1 上运动，设 $E(m,2-m,2)$（$0\le m\le 2$），则 $\overrightarrow{EF}=(1-m,m,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，若 EF // BD，则 $\overrightarrow{EF}=t\overrightarrow{BD}$（$t\ne 0$），则有 $-1=t\times 0$，显然无解，故 A 错误；

因为 A_1C_1 // AC，$AC\subset$ 平面 ACB_1，$A_1C_1\not\subset$ 平面 ACB_1，故 A_1C_1 // 平面 ACB_1，因为 E 为线段 A_1C_1 上运动，故 E 到平面 ACB_1 的距离不变，所以 V_{E-ACB_1} 为定值，不随 E 的变动而变动，故三棱锥 B_1-ACE 的体积不随动点 E 变化而变化，B 错误；

$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，设直线 EF 与 AD_1 所成角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EF}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{(-2,0,2)\cdot(1-m,m,-1)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2m^2-2m+2}}\right|=\dfrac{|m-2|}{2\sqrt{m^2-m+1}}$，令 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，解得：$m=1$，故当 E 为 A_1C_1 中点时，此时直线 EF 与 AD_1 所成的角为 $60°$，故 C 错误；

设平面 AB_1C_1D 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0\end{cases}$，令 $y=1$ 得：$z=-1$，故 $\vec{n}=(0,1,-1)$，因为当 $m=1$ 时，$(1-m,m,-1)=(0,1,-1)$ 即 $\overrightarrow{EF}=\vec{n}$，故 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D，故 D 正确.



故选：D

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：

11.【答案】$\frac{9}{10}$

【分析】利用列举法，结合古典概型概率计算公式求得正确答案.

【详解】2 名喜欢甜品的编号 a,b；3 名不喜欢甜品的编号 c,d,e，

从中任取3人，基本事件有：$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\}$，

$\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$，共10个.

抽到的 3 人中有人喜欢甜品的事件有：$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\}$，

$\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\}$，共9个.

所以抽到的 3 人中有人喜欢甜品的概率为$\frac{9}{10}$.

故答案为：$\frac{9}{10}$

12.【答案】$\frac{\pi}{6}$

【分析】先求出直线的斜率，可得它们的倾斜角，从而求出两条直线的夹角.

【详解】解：$\because$ 直线 $x=-2$ 的斜率不存在，倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，

直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的斜率为 $\sqrt{3}$，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，

故直线 $x=-2$ 与直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，

故答案为：$\frac{\pi}{6}$.

13.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】利用椭圆定义及简单几何性质，明确 a 与 c，即可得到椭圆的离心率.

【详解】由题知，$2c=AB=4$，解得 $c=2$，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

由椭圆的定义知：$2a=AC+BC=5+3=8$，解得 $a=4$，

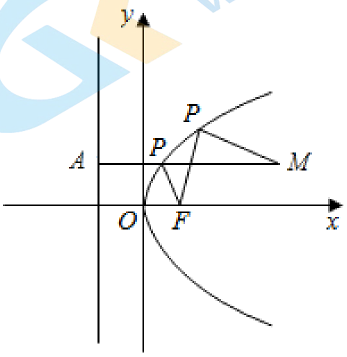
所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

14.【答案】（2，2）

【分析】设直线 l 为抛物线的准线，其方程为：x=-$\frac{1}{2}$，过点 P 作 PA⊥l，垂足为 A 点，则|PA|=|PF|，当三点 A，P，M 共线时，|PM|+|PF|取得最小值|AM|，进而得解.

【详解】如图所示，设直线 l 为抛物线的准线，其方程为：x=-$\frac{1}{2}$，



过点 P 作 PA⊥l，垂足为 A 点，则|PA|=|PF|，

∴当三点A，P，M 共线时，

当|PM|+|PF|取得最小值|AM|，|AM|=4-（-$\frac{1}{2}$）=$\frac{9}{2}$.

把 y=2 代入抛物线方程可得：$2^2=2x$，解得 x=2.

∴P（2，2）

故答案为（2，2）.

【点睛】本题考查了抛物线的定义标准方程及其性质、数形结合思想方法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

15.【答案】3

【分析】取 AD,BC 的中点 G,M，连接 GM，过点 F 作 $FO\perp$ 面 $ABCD$ 于点 O，过点 E 作 $EL\perp$ 面 $ABCD$ 于点 L；根据题意分析出点 O,L 在直线 GM 上，然后根据 $AB=GM=OG+OL+LM$ 即可求出 AB 的长.

【详解】取 AD,BC 的中点 G,M，连接 GM，

过点 F 作 $FO\perp$ 面 $ABCD$ 于点 O，过点 E 作 $EL\perp$ 面 $ABCD$ 于点 L，作 $OH\perp AB$ 于点 H，连接 FG,FH，

因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB//CD$，

又因为 $CD\subset$ 面 $CDFE$， $AB\not\subset$ 面 $CDFE$，所以 $AB//$ 面 $CDFE$，

又因为 $AB\subset$ 面 $ABEF$，面 $CDFE\cap$ 面 $ABEF=EF$，

所以 $AB//EF$，

因为面 $ABEF$，面 $CDFE$ 都与底面 $ABCD$ 所成的角相等，

所以点 O,L 在直线 GM 上，且 $OL=EF=1$， $OH=\frac{1}{2}BC=1$，

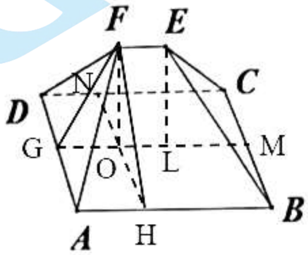
根据三垂线定理可得，$\angle FGO$ 为面 FAD 与面 $ABCD$ 所成的角，$\angle FHO$ 为面 $ABEF$ 与面 $ABCD$ 所成的角，

所以 $\angle FGO=\angle FHO$，又 OF 为公共边，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle OFG\cong\mathrm{Rt}\triangle OFH$，所以 $OG=OH=1$，

同理 $ML=1$，

所以 $AB=GM=OG+OL+LM=1+1+1=3$.



故答案为：3.

16.【答案】①②④

【分析】①可以通过设出圆的参数方程，进行求解；②设出 (x,y)，找到等量关系，建立方程，求出点 Q 的轨迹方程，即可说明；③转化为两圆是否有交点，说明是否存在点 Q；④当 PM,PN 斜率分别为 1 和-1 时，且点 P，M 在 y 轴左侧，此时 $\triangle MPN$ 面积最大，求出最大值.

【详解】点 M 在圆 $O:x^2+y^2=36$ 上，设 $M(6\cos\theta,6\sin\theta)$，则

$|MP|=\sqrt{(6\cos\theta-2)^2+(6\sin\theta)^2}=\sqrt{40-24\cos\theta}$，当 $\cos\theta=1$ 时，$|MP|$ 取得最小值，最小值为 4，①正确；

设点 $Q(x,y)$，则由题意得：$PQ^2=QM^2=OM^2-OQ^2$，则 $(x-2)^2+y^2=36-(x^2+y^2)$，整理得：$(x-1)^2+y^2=17$，所以点 Q 的轨迹是一个圆，②正确；

为以 AB 为直径的圆，圆心为 $(5,4)$，半径为 1，方程为：$(x-5)^2+(y-4)^2=1$，下面判断此圆与点 Q

的轨迹方程$(x-1)^2+y^2=17$是否有交点，由于$\sqrt{(5-1)^4+4^2}=4\sqrt{2}>\sqrt{17}+1$，两圆相离，故不存在点$Q$，使得$\angle AQB=90^\circ$，③错误；

当PM,PN斜率分别为1和-1时，且点P，M在y轴左侧，此时$\triangle MPN$为等腰直角三角形，面积最大，此时$PQ=QM=QN=1+\sqrt{17}$，$(S_{\triangle PMN})_{\max}=\frac{1}{2}\times2\times\left(1+\sqrt{17}\right)^2=18+2\sqrt{17}$，④正确.

故答案为：①②④

【点睛】轨迹方程问题，一般处理思路，直接法，定义法，相关点法以及交轨法，要能结合题目特征选择合适的方法进行求解.

三、解答题：

17.【答案】（1）$a_n=2n-7$

（2）$S_n=n^2-6n$

（3）-9

【分析】（1）通过计算等差数列$\{a_n\}$的首项和公差，从而求得a_n.

（2）利用等差数列前n项和公式求得S_n.

（3）根据二次函数的性质求得S_n的最小值.

【小问1详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d,d>0$，由于a_2是a_3+4与a_5的等比中项，

所以$a_2^2=(a_3+4)\cdot a_5$，

所以$\begin{cases}a_1+d=-3\\(-3)^2=(-3+d+4)\cdot(-3+3d)\end{cases}$，

解得$d=2,a_1=-5$，

所以$a_n=-5+(n-1)\times2=2n-7$.

【小问2详解】

由（1）得$S_n=\frac{-5+2n-7}{2}\times n=n^2-6n$

【小问3详解】

由（2）得$S_n=n^2-6n$，根据二次函数的性质可知，

当$n=-\frac{-6}{2}=3$时，S_n取得最小值$S_3=3^2-6\times3=-9$.

18.【答案】（1）证明详见解析

（2）$\frac{\sqrt{15}}{5}$

（3）存在 E，使得 B_1E 与 BP 垂直，此时 $\frac{NE}{NC_1}=\frac{3}{5}$

【分析】（1）根据线面平行的判定定理来证得 $BP//$ 平面 C_1MN .

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法求得直线 B_1C 与平面 C_1MN 所成角的正弦值.

（3）利用向量法确定符合题意的 E 点的位置.

【小问 1 详解】

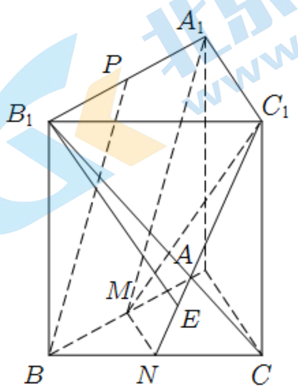
连接 A_1M，由于 M,N 分别是 AB,BC 的中点，所以 $MN//AC$，

由于 $A_1C_1//AC$，所以 $MN//A_1C_1$，所以 M,N,C_1,A_1 四点共面，

由于 $BM//A_1P, BM=A_1P$，所以四边形 BMA_1P 是平行四边形，

所以 $BP//A_1M$，由于 $BP\not\subset$ 平面 C_1MN，$A_1M\subset$ 平面 C_1MN，

所以 $BP//$ 平面 C_1MN .



【小问 2 详解】

若 $AB\perp AC, AA_1=AB=AC=2$，所以在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

可以 A 为空间坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系，

$B_1(2,0,2),C(0,2,0),\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,-2)$，

$M(1,0,0),A_1(0,0,2),C_1(0,2,2)$，$\overrightarrow{MA_1}=(-1,0,2),\overrightarrow{MC_1}=(-1,2,2)$，

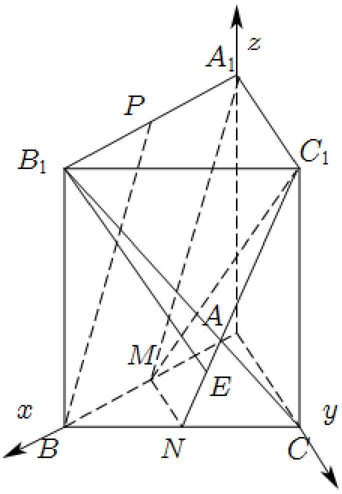
设平面 C_1MN 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA_1}=-x+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=-x+2y+2z=0\end{cases}$，故可设 $\vec{n}=(2,0,1)$，

设直线 B_1C 与平面 C_1MN 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{B_1C}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{B_1C}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

直线 B_1C 与平面 C_1MN 所成



【小问 3 详解】

$B(2,0,0),P(1,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，

$C_1(0,2,2),N(1,1,0),\overrightarrow{NC_1}=(-1,1,2)$，

设 C_1N 上是否存在一点 E，使得 B_1E 与 BP 垂直，

设 $\dfrac{NE}{NC_1}=\lambda, NE=\lambda NC_1$，

则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AN}+\lambda\overrightarrow{NC_1}=(1,1,0)+(-\lambda,\lambda,2\lambda)=(1-\lambda,1+\lambda,2\lambda)$，

则 $\overrightarrow{B_1E}=(-1-\lambda,1+\lambda,2\lambda-2)$，

由 $\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{BP}=(-1-\lambda,1+\lambda,2\lambda-2)\cdot(-1,0,2)=1+\lambda+4\lambda-4=5\lambda-3=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{3}{5}$，所以存在 E，使得 B_1E 与 BP 垂直，此时 $\dfrac{NE}{NC_1}=\dfrac{3}{5}$．

19.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）$\angle PFQ=90°$

【分析】（1）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a-c=1,\end{cases}$ 求出 a，c，然后求解 b，即可得到椭圆方程．

（2）当直线 l 的斜率不存在时，验证 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，即 $\angle PFQ=90°$．当直线 l 的斜率存在时，设 l：$y=k(x-1)$，其中 $k\neq0$．联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得（$4k^2+3$）$x^2-8k^2x+4k^2-12=0$．由题意，知 $\Delta>0$ 恒成立，

设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），利用韦达定理，结合直线 MA 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$．求出 $P\left(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$、$Q\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$．利用向量的数量积，转化求解即可．

【小问 1 详解】

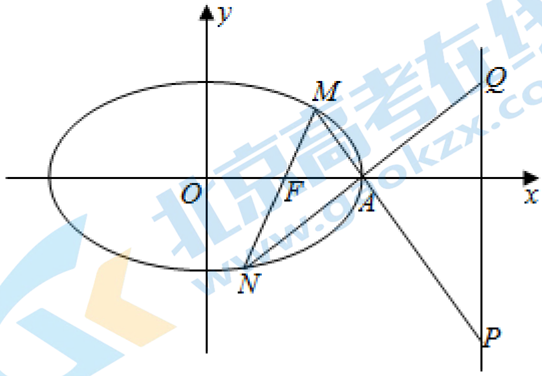
由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a-c=1,\end{cases}$

解得 $a=2$，$c=1$，

从而$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】



当直线 l 的斜率不存在时，有$M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$N\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，$P$（4，－3），$Q$（4，3），$F$（1，0），

则$\overrightarrow{FP}=(3,-3)$，$\overrightarrow{FQ}=(3,3)$，故$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，即$\angle PFQ=90°$.

当直线 l 的斜率存在时，设 l：$y=k(x-1)$，其中 $k\neq0$.

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

由题意，知 $\Delta>0$ 恒成立，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

直线 MA 的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=4$，得$y_P=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$，即$P\left(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$，同理可得$Q\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$.

所以$\overrightarrow{FP}=\left(3,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$，$\overrightarrow{FQ}=\left(3,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$.

因为$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=9+\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=9+\dfrac{4k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=9+\dfrac{4k^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=9+\frac{4k^2\left(\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1\right)}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{16k^2}{4k^2+3}+4}=9+\frac{4k^2\left[\left(4k^2-12\right)-8k^2+\left(4k^2+3\right)\right]}{\left(4k^2-12\right)-16k^2+4\left(4k^2+3\right)}=0$$，所以$\angle PFQ=90°$.

综上，$\angle PFQ=90°$.

20.【答案】（1） $y=x-1$

（2） $\frac{1}{e}$

（3）证明见解析

【分析】（1）根据导数的几何意义直接求切线方程；

（2）根据导数判断函数的单调性，进而可得最大值；

（3）若证 $g(x)-f(x)<\frac{2}{e}$，需证 $g(x)_{\max}-f(x)_{\min}<\frac{2}{e}$，分别计算函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最值.

【小问 1 详解】

由 $f'(x)=\ln x+1$,

得 $f'(1)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程： $y=x-1$；

【小问 2 详解】

由 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，可知：

当 $x\in(-\infty,1)$ 时， $g'\ x\ >0$，此时函数 $g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g'\ x\ <0$，此时函数 $g(x)$ 单调递减；

所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得最大值是 $\frac{1}{e}$；

【小问 3 详解】

由（1）知 $f'(x)=\ln x+1$,

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时， $f'\ x\ <0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时， $f'\ x\ >0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=\frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{e}$，

由（2）知， $x=1$ 时， $g(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{e}$，

故 $g(x)-f(x)\le g(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\frac{1}{e}-\left(-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$，

$f\left(x\right)$取最小值时与$g\left(x\right)$取最大值时x值不同，故$g\left(x\right)-f\left(x\right)<\frac{2}{e}$.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系．(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数．(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题．(4)考查数形结合思想的应用．

21.【答案】（1）$b_2=\frac{1}{2},b_3=\frac{1}{2},b_4=\frac{1}{4}$

（2）①证明详见解析；②$\frac{1}{2^{1011}}$

【分析】（1）根据伴随数列的知识求得正确答案.

（2）①根据伴随数列、常数列、等比数列、充要条件等知识证得结论成立.

②对a_n,a_{n+1}的取值进行分类讨论，利用放缩法求得正确答案.

【小问 1 详解】

$b_2=\left|a_1-\frac{a_2}{2}\right|\cdot b_1=\frac{1}{2},b_3=\left|a_2-\frac{a_3}{2}\right|\cdot b_2=\frac{1}{2},b_4=\left|a_3-\frac{a_4}{2}\right|\cdot b_3=\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

①，充分性：若 X 数列$\left\{a_n\right\}$为常数列，

因为$a_1=1$，所以$a_n=1,n\in\mathrm{N}^*$，

所以$b_{n+1}=\left|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}\right|b_n=\frac{1}{2}b_n,n\in\mathrm{N}^*$，

又因为$b_1=1\neq0$，所以伴随数列$\left\{b_n\right\}$是以1为首项，

以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

必要性：（反证法）假设数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列，而数列$\left\{a_n\right\}$不是常数列.

所以数列$\left\{a_n\right\}$中存在等于 0 的项，设第一个等于零的项为a_k，其中$k>1,k\in\mathrm{N}^*$，

所以$b_k=\left|1-\frac{0}{2}\right|b_{k-1}=b_{k-1}$，得等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比为1，

又$b_{k+1}=\left|\frac{a_{k+1}}{2}\right|b_k$，得等比数列$\left\{b_n\right\}$的公比$\left|\frac{a_{k+1}}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$，与“$\left\{b_n\right\}$的公比为1”矛盾，

所以当数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列时，数列$\left\{a_n\right\}$是常数列.

综上所述，“$\left\{a_n\right\}$为常数列”是“$\left\{b_n\right\}$为等比数列的充要条件.

②，当$a_n=1,a_{n+1}=1$时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$；

当 $a_n=1,a_{n+1}=0$ 时，$b_{n+1}=b_n$；

当 $a_n=0,a_{n+1}=1$ 时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$；

当 $a_n=0,a_{n+1}=0$ 时，$b_{n+1}=0$；

所以 $b_{n+2}=\frac{1}{4}b_n$ 或 $b_{n+2}=\frac{1}{2}b_n$ 或 $b_{n+2}=0$，且 $b_n\geq 0$，所以 $b_{n+2}\leq\frac{1}{2}b_n$，

所以 $b_{2023}\leq\frac{1}{2}b_{2021}\leq\frac{1}{2}b_{2019}\leq\cdots\leq\frac{1}{2^{1011}}\cdot b_1=\frac{1}{2^{1011}}$，

当 $a_n=\begin{cases}1,n=2k-1,k\in\mathrm{N}^*\\0,n=2k,k\in\mathrm{N}^*\end{cases}$ 时，$b_{2023}=\frac{1}{2^{1011}}$.

【点睛】解新定义题型的步骤：(1)理解“新定义”——明确“新定义”的条件、原理、方法、步骤和结论.(2)重视“举例”,利用“举例”检验是否理解和正确运用“新定义”;归纳“举例”提供的解题方法.归纳“举例”提供的分类情况.(3)类比新定义中的概念、原理、方法，解决题中需要解决的问题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！