2024 北京一零一中高二（上）期末

数　学

（本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1,a_4=5$，则$a_8=$（　）

A. 9　　B. 11　　C. 13　　D. 15

2. 若直线$2x+y-1=0$与直线$x-my=0$垂直，则$m=$（　）

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知$\{a_n\}$为等比数列，公比$q>0,a_2+a_3=12,a_1\cdot a_5=81$，则$a_5=$（　）

A. 81　　B. 27　　C. 32　　D. 16

4. 已知圆C的圆心在抛物线$y^2=4x$上，且此圆C过定点$(1,0)$，则圆C与直线$x+1=0$的位置关系为（　）

A. 相切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 不能确定

5. 平面α的斜线AB交α于点B，过定点 A 的动直线l与AB垂直，且交α于点C，则动点C的轨迹是（　）

A. 一条直线　　B. 一个圆　　C. 一个椭圆　　D. 曲线的一支

6. 在各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$中，若$a_{n+1}-a_n^2+a_{n-1}=0(n\geq 2)$，

则$S_{2n-1}-4n=$

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

7. 在平面直角坐标系xOy中，已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，A 为双曲线右支上一点，连接$AF_1$交$y$轴于点$B$．若$\triangle ABF_2$为等边三角形，则双曲线$C$的离心率为（　）

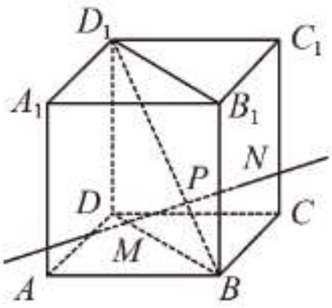
A. $2\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

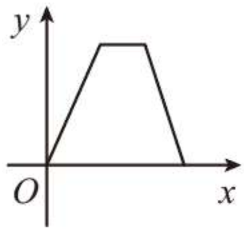
8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“$a_1>0$”是“$S_{2024}>0$”的（　）

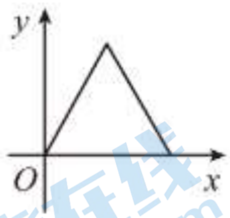
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

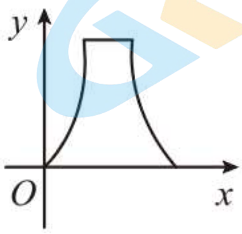
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

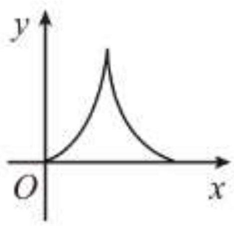
9. 如图，动点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上，过点P作垂直于平面BB_1D_1D的直线，与正方体表面相交于M，N．设$BP=x$，$MN=y$，则函数$y=f(x)$的图象大致是（ ）



A. 

B. 

C. 

D. 

10. 已知F_1,F_2同时为椭圆C_1：$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\left(a_1>b_1>0\right)$与双曲线$C_2$：$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1$（$a_2>0$，$b_2>0$）的左、右焦点，设椭圆$C_1$与双曲线$C_2$在第一象限内交于点$M$，椭圆$C_1$与双曲线$C_2$的离心率分别为$e_1,e_2$，$O$为坐标原点，给出下列四个结论：

①$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$；

②若$\angle F_1MF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则$b_1^2=3b_2^2$；

③$|F_1F_2|=2|MO|$的充要条件是$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=2$；

④若$|F_1F_2|=3|MF_2|$，则e_1e_2的取值范围是$(\dfrac{3}{5},3)$.

其中正确结论的个数是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线方程为$x+2y=0$，则$a=$__________.

12. 在空间直角坐标系中，若直线l的方向向量是$\vec{v}=\left(-2,2,1\right)$，平面$\alpha$的一个法向量是$\vec{n}=\left(2,0,1\right)$，则直线$l$与平面$\alpha$所成角的正弦值等于________.

13. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，$n\in\mathrm{N}^*$，若$a_3=\dfrac{1}{7}$，则$a_1=$______.

14. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，若双曲线上存在一点$P$使

$\dfrac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$，则该双曲线的离心率的取值范围是__________.

15. 普林斯顿大学的康威教授于 1986 年发现了一类有趣的数列并命名为“外观数列”（Lookandsaysequence），该数列由正整数构成，后一项是前一项的“外观描述”.例如：取第一项为 1，将其外观描述为“1 个 1”，则第二项为 11；将 11 描述为“2 个 1”，则第三项为 21；将 21 描述为“1 个 2，1 个 1”，则第四项为 1211；将 1211 描述为“1 个 1，1 个 2，2 个 1”，则第五项为 111221，…，这样每次从左到右将连续的相同数字合并起来描述，给定首项即可依次推出数列后面的项.则对于外观数列$\{a_n\}$，下列说法正确的有__________.

①若 $a_1=3$，则从 a_4 开始出现数字 2；

②若 $a_1=k\left(k=1,2,3,\cdots,9\right)$，则 $a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的最后一个数字均为 k；

③$\{a_n\}$ 可能既是等差数列又是等比数列；

④若 $a_1=123$，则 $a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 均不包含数字 4.

三、解答题共 4 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

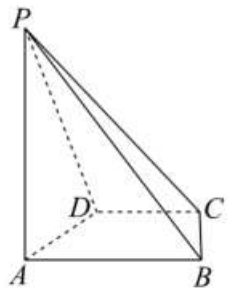
16. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}-a_n=2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，且 a_5,a_6,a_9 成等比数列，

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_n 的最小值及此时 n 的值.

17. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，

$\angle DAB=\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$PA\perp AD$，$AB=3$，$CD=AD=2$，$PA=2\sqrt{3}$.



（1）求证：CD // 平面 PAB；

（2）求点 B 到平面 PCD 的距离；

（3）求二面角 $A-BC-P$ 的余弦值.

18. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为$\dfrac{1}{2}$，右焦点为 F，点 $A\left(a,0\right)$，且$|AF|=1$.过点 F 的直线 l（不与 x 轴重合）交椭圆 C 于点 M,N，直线 MA，NA 分别与直线 $x=4$ 交于点 P,Q.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）判断点 A 与以 PQ 为直径的圆的位置关系，并证明你的结论；

（3）求△AMN 面积的最大值.

19. 设 m 为给定的正奇数，定义无穷数列 $A_m: a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, a_n\text{为偶数,}\\ a_n+m, a_n\text{为奇数,}\end{cases}$ 其中 $n\in\mathbf{N}^*$.若 a_k 是数列 A_m 中的项，则记作 $a_k\in A_m$.

（1）若 $m=5$，写出 A_5 的前 5 项；

（2）求证：集合 $B=\{k\in\mathbf{N}^*|a_k\in A_m, a_k>2m\}$ 是空集；

（3）记集合 $S_m=\{x|x\in A_m\}$，$S=\{x|\forall\text{正奇数}m, x\in S_m\}$，求集合 S.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】C

【分析】根据等差数列的通项公式进行求解即可.

【详解】由题意知 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 1 \\ a_4 = a_1 + 3d = 5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} d = 2 \\ a_1 = -1 \end{cases}$，所以 $a_n = -1 + 2(n-1) = 2n - 3$，所以 $a_8 = 16 - 3 = 13$.

故选：C.

2. 【答案】C

【分析】利用两直线垂直，斜率相乘为-1，列出方程求解即可.

【详解】$\because$ 直线 $2x + y - 1 = 0$ 与直线 $x - my = 0$ 垂直，

$\therefore -2 \times \frac{1}{m} = -1 (m \neq 0)$

$\therefore m = 2$

故选：C

3. 【答案】A

【分析】根据等比数列基本量的计算即可求解.

【详解】根据 $a_1 \cdot a_5 = 81$ 可得 $a_1 \cdot a_1 q^4 = 81 \Rightarrow \left(a_1 q^2\right)^2 = 81$，所以 $a_3 = 9$ 或 $a_3 = -9$，

若 $a_3 = -9$，则 $a_2 = -a_3 + 12 = 21, q = \frac{a_3}{a_2} < 0$ 不符合要求，

若 $a_3 = 9$，则 $a_2 = -a_3 + 12 = 3, q = \frac{a_3}{a_2} = 3 > 0$ 符合要求，故 $a_5 = a_3 q^2 = 81$，

故选：A

4. 【答案】A

【分析】根据抛物线的定义求得正确答案.

【详解】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $(1,0)$，准线方程为 $x = -1$，

根据抛物线的定义可知，C 到焦点的距离等于到准线的距离，

所以圆 C 与直线 $x + 1 = 0$ 相切.

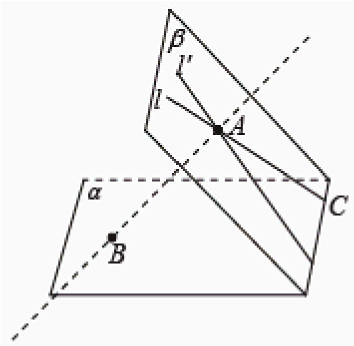
故选：A

5. 【答案】A

【分析】先找出定点 A 和直线 l 确定的一个平面，结合平面相交的特点可得轨迹类型.

【详解】如图，设 l 与 l' 是其中的两条任意的直线，则这两条直线确定一个平面 β，且 α 的斜线

$AB \perp \beta$，由过平面外一点有且只有一个平面与已知直线垂直可知过定点A与AB垂直所有直线都在这个平面内，故动点C都在平面β与平面α的交线上.



【点睛】本题主要考查轨迹的类型确定，熟悉平面的基本性质及推论是求解的关键，侧重考查直观想象的核心素养.

6.【答案】A

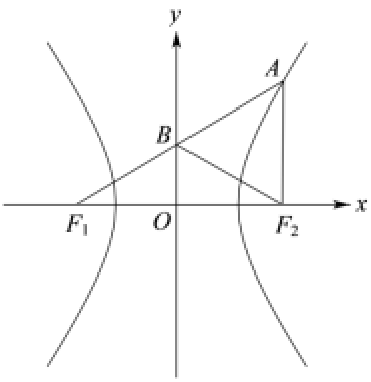
【详解】试题分析：根据等差数列$\{a_n\}$性质可知$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n\left(n\ge 2\right)$，所以$2a_n-a_n{}^2=0$，因为$a_n\ne 0$，所以$a_n=2$，则$S_{2n-1}-4n=\left(2n-1\right)\times 2-4n=-2$，故选A.

考点：等差数列.

7.【答案】C

【分析】由长度关系可得$|BF_2|=\dfrac{1}{2}|AF_1|$，知$AF_2\perp F_1F_2$，在$\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2A$中，利用$\tan\angle F_1AF_2=\sqrt{3}$可构造齐次方程求得双曲线离心率.

【详解】



设$|AF_2|=m$，

$\because \triangle ABF_2$为等边三角形，$\therefore |AB|=|BF_2|=m$，$\angle F_1AF_2=\dfrac{\pi}{3}$，又$|BF_1|=|BF_2|=m$，

$\therefore |BF_2|=\dfrac{1}{2}|AF_1|$，$\therefore AF_2\perp F_1F_2$，$\therefore |AF_2|=\dfrac{b^2}{a}$，

$\therefore \tan\angle F_1AF_2=\dfrac{|F_1F_2|}{|AF_2|}=\dfrac{2c}{\dfrac{b^2}{a}}=\sqrt{3}$，$\therefore 2ac=\sqrt{3}b^2=\sqrt{3}c^2-\sqrt{3}a^2$，

$\therefore \sqrt{3}e^2-2e-\sqrt{3}=0$，解得：$e=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（舍）或$e=\sqrt{3}$，

$\therefore$双曲线C的离心率为$\sqrt{3}$.

故选：C.

8.【答案】D

【分析】结合等比数列的前n项和公式，以及充分、必要条件的判断方法，判断出正确选项即可.

【详解】由于数列$\{a_n\}$是等比数列，当$q\neq 0$且$q\neq 1$时，$S_{2024}=\dfrac{a_1(1-q^{2024})}{1-q}$，

充分性：当$a_1>0$，且公比$q=-2$时，得$1-q>0$，$1-q^{2024}<0$，则$S_{2024}<0$，不满足充分性；

必要性：当$a_1<0$，且公比$q=-2$时，得$1-q>0$，$1-q^{2024}<0$，满足$S_{2024}>0$，但不满足$a_1>0$，不满足必要性；

故选：D.

9.【答案】B

【详解】试题分析：由题意知，MN⊥平面BB_1D_1D，则MN在底面ABCD上的射影是与对角线AC平行的直线，故当动点P在对角线BD_1上从点B向D_1运动时，x变大y变大，直到P为BD_1的中点时，y最大为AC．然后x变小y变小，直到y变为0，因底面ABCD为正方形，故变化速度是均匀的，且两边一样．故答案为B．

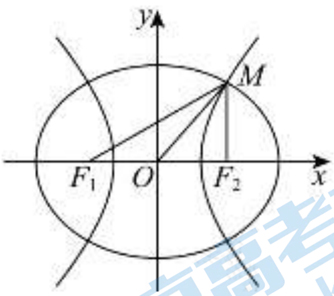
考点：函数的图像与图像项变化．

点评：本题考查了函数图象的变化，根据几何体的特征和条件进行分析两个变量的变化情况，再用图象表示出来，考查了作图和读图能力．属于中档题．

10.【答案】D

【分析】根据椭圆以及双曲线的关系，即可判断A选项；根据椭圆以及双曲线的定义，结合余弦定理，可推得B、C选项；根据椭圆以及双曲线的定义结合三角形的三边关系，得出a_1,a_2的关系式.进而根据对勾函数的单调性，即可得出D选项.

【详解】



对于A项，由已知椭圆与双曲线共焦点可得，$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$，故A选项正确；

对于B项，根据椭圆以及双曲线的定义，

可得$\begin{cases}|MF_1|+|MF_2|=2a_1\\|MF_1|-|MF_2|=2a_2\end{cases}$，所以$\begin{cases}|MF_1|=a_1+a_2\\|MF_2|=a_1-a_2\end{cases}$.

在$\triangle F_1MF_2$中，由余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\dfrac{\pi}{3}$，

即$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\times\dfrac{1}{2}$，

整理可得：$4c^2=a_1^2+3a_2^2$.

所以$a_1^2-c^2=3(c^2-a_2^2)$，即$b_1^2=3b_2^2$，故B项正确；

对于C项，

必要性：若$|F_1F_2|=2|MO|$，则$\triangle F_1MF_2$为直角三角形，

所以$|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2$，

即$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2$，

整理可得：$a_1^2+a_2^2=2c^2$，

两边同时除以c^2可得，$\left(\dfrac{a_1}{c}\right)^2+\left(\dfrac{a_2}{c}\right)^2=2$，即$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=2$，满足必要性；

充分性：若$\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=2$，易可得$a_1^2+a_2^2=2c^2$，$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2$，

所以$|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2$，所以$\triangle F_1MF_2$为直角三角形，且$\angle F_1MF_2=90°$，

可得$|F_1F_2|=2|MO|$，满足充分性.

故C项正确；

对于D项，由已知可得$2c=3(a_1-a_2)$.

所以，$e_1e_2=\dfrac{c}{a_1}\cdot\dfrac{c}{a_2}=\dfrac{c^2}{a_1a_2}=\dfrac{\frac{9}{4}(a_1-a_2)^2}{a_1a_2}=\dfrac{9}{4}\dfrac{(a_1^2-2a_1a_2+a_2^2)}{a_1a_2}=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}-2\right)$.

令$t=\dfrac{a_1}{a_2}$，则$e_1e_2=\dfrac{9}{4}\left(t+\dfrac{1}{t}-2\right)$.

因为$a_1>a_2$，所以$t=\dfrac{a_1}{a_2}>1$.

又$|MF_1|+|MF_2|>|F_1F_2|$，所以有$2a_1>2c=3(a_1-a_2)$，所以有$a_1<3a_2$；

$|MF_1|-|MF_2|<|F_1F_2|$，所以有$2a_2<2c=3(a_1-a_2)$，所以有$3a_1>5a_2$.

所以$t=\dfrac{a_1}{a_2}\in(\dfrac{5}{3},3)$.

设函数$y=t+\dfrac{1}{t}-2$，再设$\dfrac{5}{3}<t_1<t_2<3$，

则 $y_1-y_2=(t_1+\frac{1}{t_1}-2)-(t_2+\frac{1}{t_2}-2)=\frac{(t_1-t_2)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}$，

由于 $\frac{5}{3}<t_1<t_2<3$，得 $t_1-t_2<0$， $t_1t_2>0$， $t_1t_2-1>0$，

所以 $y_1-y_2<0$，即 $y_1<y_2$，函数 $y=t+\frac{1}{t}-2$ 在区间 $(\frac{5}{3},3)$ 上单调递增，

所以 $\frac{4}{15}<y<\frac{4}{3}$，所以 $\frac{3}{5}<e_1e_2<3$，故 D 正确.

故选：D.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】2

【分析】先由双曲线的渐近线设出双曲线的方程，再利用待定系数法即可求得 a 的值.

【详解】因为双曲线的一条渐近线方程为 $x+2y=0$，

所以双曲线的方程可设为 $\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda\left(\lambda\neq0\right)$，即 $\frac{x^2}{4\lambda}-\frac{y^2}{\lambda}=1$，

因为 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$，

所以 $\begin{cases}4\lambda=a^2\\ \lambda=1\end{cases}$，解得 $a=2$（负值舍去），

所以 $a=2$.

故答案为：2.

12.【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【分析】利用空间向量的坐标求出直线 l 与平面 α 法向量夹角的余弦值，即可得到直线 l 与平面 α 所成角的正弦值.

【详解】直线 l 与平面 α 所成角的正弦值即直线 l 与平面 α 法向量夹角的余弦值的绝对值.

设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则：

所以 $\sin\theta=|\cos<\vec{v},\vec{n}>|=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|-2\times2+2\times0+1\times1|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

13.【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】由递推式，结合 $a_3=\frac{1}{7}$ 依次求出 a_2、a_1 即可.

【详解】由 $a_3=\dfrac{a_2}{2a_2+1}=\dfrac{1}{7}$，可得：$a_2=\dfrac{1}{5}$，

又 $a_2=\dfrac{a_1}{2a_1+1}=\dfrac{1}{5}$，可得：$a_1=\dfrac{1}{3}$.

故答案为：$\dfrac{1}{3}$.

14.【答案】$(1,\sqrt{2}+1)$

【详解】因为在 ΔPF_1F_2 中，由正弦定理得 $\dfrac{PF_2}{\sin\angle PF_1F_2}=\dfrac{PF_1}{\sin\angle PF_2F_1}$，

则由已知，得 $\dfrac{a}{PF_2}=\dfrac{c}{PF_1}$，即 $aPF_1=cPF_2$，$PF_1=\dfrac{c}{a}PF_2$，

由双曲线的定义知

$PF_1-PF_2=2a,\dfrac{c}{a}PF_2-PF_2=2a\Rightarrow PF_2=\dfrac{2a^2}{c-a}$，

由双曲线的几何性质知 $PF_2>c-a,\dfrac{2a^2}{c-a}>c-a\Rightarrow c^2-2ac-a^2<0,$

所以 $e^2-2e-1<0,$ 解得 $-\sqrt{2}+1<e<\sqrt{2}+1,$

又 $e\in(1,+\infty)$，故双曲线的离心率 $e\in(1,\sqrt{2}+1)$

15.【答案】②③④

【分析】由外观数列的定义可判断①和②；举例子可判断③；由反证法，结合外观数列的定义可判断④.

【详解】对于①，当 $a_1=3$ 时，

由外观数列的定义可得：$a_2=13$，$a_3=1113$，$a_4=3113$，故①错；

对于②，由外观数列的定义可知，每次都是从左向右描述，

所以第一项的 k $(k=1,2,3,\cdots,9)$ 始终在最右边，即最后一个数字，故②正确；

对于③，取 $a_1=22$，则 $a_2=a_3=a_4=\cdots=22$，此时 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列，故③正确；

对于④，当 $a_1=123$ 时，

由外观数列的定义可得：$a_2=111213$，$a_3=31121113$，$a_4=1321123113$，.

设 a_k $(k\in\mathbf{N}^*,k\geq5)$ 第一次出现数字 4，

则 a_{k-1} 中必出现了 4 个连续的相同数字 m $(m=1,2,3,\cdots,9)$.

而 a_{k-2} 的描述必须包含"m 个 m，m 个 m"，显然 a_{k-2} 的描述不符合外观数列的定义.

所以当 $a_1=123$ 时，a_n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 均不包含数字 4，故④正确.

故答案为：②③④

【点睛】关键点点睛：本题考查数列的新定义、根据数列的递推关系式写出数列中的项及利用递推关系式研究数列的性质.解题关键在于理解数列的新定义，明确数列的递推关系式.根据数列的定义可判断①和②；举出特殊例子可判断③；通过反证法及数列的定义可判断④.

三、解答题共 4 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $a_n=2n-9$

(2) 最小值为$-16,n=4$

【分析】(1) $\{a_n\}$为等差数列，公差为2，根据题目条件得到方程，求出首项，得到通项公式；

(2) 求出$S_n=(n-4)^2-16$，求出最小值及n的值.

【小问1详解】

由$a_{n+1}-a_n=2$知$\{a_n\}$为等差数列，设$\{a_n\}$的公差为d，则$d=2$，

a_5,a_6,a_9成等比数列，所以$a_6^2=a_5a_9$，即$\left(a_1+10\right)^2=\left(a_1+8\right)\left(a_1+16\right)$，

解得$a_1=-7$，又$d=2$，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-9$；

【小问2详解】

由(1)得$S_n=\dfrac{n\left(-7+2n-9\right)}{2}=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

所以当$n=4$时，S_n取得最小值，最小值为-16

17.【答案】(1) 证明见解析

(2) $\sqrt{3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

【分析】(1) 由题意得$AB//CD$，利用线面平行的判定定理，即可证明结论；

(2) 建立空间直角坐标系$A-xyz$，利用向量法求解空间距离即可；

(3) 根据法向量的夹角即可求解.

【小问1详解】

$\because$底面$ABCD$为直角梯形，$\angle DAB=\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore AB//CD$，

又$AB\subset$平面PAB，$CD\not\subset$平面PAB，

$\therefore CD//$平面PAB；

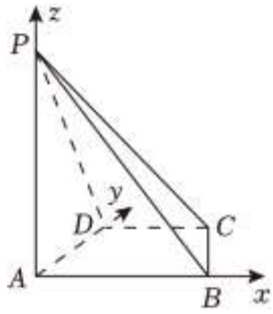
【小问2详解】

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

又$PA\perp AD$，$\therefore PA\perp$平面$ABCD$，

又$\angle DAB=\dfrac{\pi}{2}$，即$DA\perp AB$，

则以 A 为原点，以 AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图所示：



又 $AB=3$，$CD=AD=2$，$PA=2\sqrt{3}$，

则 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，

故 $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$，

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2x=0\\ \overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=2y-2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，则 $z=1$，$x=0$，

$\therefore$ 平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$，

所以点 B 到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

【小问 3 详解】

设平面 PCB 的一个法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(3,0,-2\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=-a+2b=0\\ \overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=3a-2\sqrt{3}c=0\end{cases}$，取 $a=2$，则 $b=1,c=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 平面 PCB 的一个法向量为 $\vec{m}=(2,1,\sqrt{3})$，

又 $PA\perp$ 平面 ABC，则平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2\sqrt{3})$，

$\therefore \left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{AP}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{m}|\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

由图形得二面角 $A-BC-P$ 所成角为锐二面角，

$\therefore$ 二面角 $A-BC-P$ 的所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

18.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2） 点 A 在以 PQ 为直径的圆的内部，详见解析

（3）$\frac{3}{2}$

【分析】（1）由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a-c=1,\end{cases}$ 求出a,c，然后求解b，即可得到椭圆方程.

（2）当直线l的斜率不存在时，验证$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$，即$\angle PAQ>90^\circ$．当直线$l$的斜率存在时，设$l$：$y=k(x-1)$，其中$k\neq 0$．联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，利用韦达定理，结合直线MA的方程，求出P,Q的坐标．利用向量的数量积$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$，转化求解即可.

（3）分直线l的斜率不存在和存在两种情况讨论，其中当直线l的斜率存在时，先求出点A到直线l的距离，再利用韦达定理求出线段MN的长，进而求出$\triangle AMN$面积的最大值.

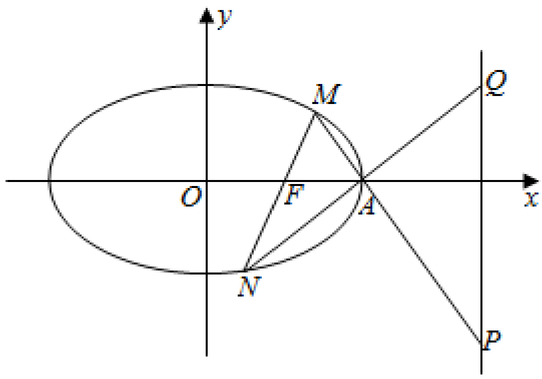
【小问1详解】

由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a-c=1,\end{cases}$ 解得$a=2,c=1$，

从而$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问2详解】



当直线l的斜率不存在时，有$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$N\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，$P(4,-3),Q(4,3),F(1,0),A(2,0)$，

则$\overrightarrow{AP}=(2,-3)$，$\overrightarrow{AQ}=(2,3)$，故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-5$，即$\angle PAQ>90^\circ$.

当直线l的斜率存在时，设$l:y=k(x-1)$，其中$k\neq 0$.

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

由题意，知$\Delta>0$恒成立，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$， $x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

直线 MA 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=4$，得 $y_P=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$，即 $P\left(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$，同理可得 $Q\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AP}=\left(2,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(2,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=4+\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=4+\dfrac{4k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=4+\dfrac{4k^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=4+\frac{4k^2\left(\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{8k^2}{4k^2+3}+1\right)}{\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{16k^2}{4k^2+3}+4}=4+\frac{4k^2\left[(4k^2-12)-8k^2+(4k^2+3)\right]}{(4k^2-12)-16k^2+4(4k^2+3)}=-5<0,$$

所以 $\angle PAQ>90^\circ$，

综上 $\angle PAQ>90^\circ$，点 A 在以 PQ 为直径的圆的内部.

【小问 3 详解】

当直线 l 的斜率不存在时，有 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$， $N\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$， $A(2,0)$，

则 $\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(2-1)\times[\dfrac{3}{2}-(-\dfrac{3}{2})]=\dfrac{3}{2}$.

当直线 l 的斜率存在时，由于 $l:y=k(x-1)$，

点 A 到直线 l 的距离为：$d=\dfrac{|2k-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

线段 MN 的长为：$|MN|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(\dfrac{8k^2}{4k^2+3})^2-4\times\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\dfrac{12(1+k^2)}{4k^2+3}$.

则 $\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}\times\dfrac{12(1+k^2)}{4k^2+3}=\dfrac{3}{2}\sqrt{-\dfrac{3}{16}(\dfrac{1}{k^2+\frac{3}{4}})^2-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k^2+\frac{3}{4}})+1}$，

构造函数 $y=-\dfrac{3}{16}t^2-\dfrac{1}{2}t+1$，令 $t=\dfrac{1}{k^2+\frac{3}{4}}\in(0,\dfrac{4}{3})$，

显然函数 $y=-\dfrac{3}{16}t^2-\dfrac{1}{2}t+1$ 在区间 $(0,\dfrac{4}{3})$ 上单调递减，

且当 $t=0$ 时，$y=1$；当 $t=\dfrac{4}{3}$ 时，$y=0$；

所以 $0<y<1$，从而 $\triangle AMN$ 面积的范围为 $(0,\frac{3}{2})$；

综上，$\triangle AMN$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$.

19.【答案】（1）$1,6,3,8,4$，

（2）证明见解析 （3）$S=\{1,2\}$.

【分析】（1）根据递推公式即可逐一代入求解；

（2）利用反证法证明；

（3）由 $S_1=\{1,2\}$，提出猜想 $S=\{1,2\}$，证明.

【小问 1 详解】

当 $m=5$ 时，由 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, a_n\text{为偶数},\\ a_n+5, a_n\text{为奇数},\end{cases}$ 可得

$a_2=a_1+5=6, a_3=\frac{1}{2}a_2=3, a_4=a_3+5=8, a_5=\frac{1}{2}a_4=4$，

所以 A_5 的前 5 项为 $1,6,3,8,4$，

【小问 2 详解】

假设集合 $B=\{k\in \mathrm{N}^*\mid a_k\in A_m，\ a_k>2m\}$ 非空，

当 $k=1$ 时，$a_1=1$，又 m 是正奇数，$2m\ge 2$，而 $a_1<2m$，不合题意，

当 $k=2$ 时，$a_2=1+m$，若 $a_2>2m$，则需 $m<1$，又 m 是正奇数，不合题意，

设 B 中元素的最小值为 k（显然 $k\ge 3$），

因为 $a_k>2m\ge a_{k-1}$，所以 $a_k=a_{k-1}+m$，因此 a_{k-1} 为奇数，且 $a_{k-1}>m$.

若 $a_{k-1}=a_{k-2}+m$，则 a_{k-2} 为偶数，

但此时应有 $a_{k-1}=\frac{1}{2}a_{k-2}$，与 $a_{k-1}=a_{k-2}+m$ 矛盾，

若 $a_{k-1}=\frac{1}{2}a_{k-2}$，则 $a_{k-2}>2m$，即 $k-2\in B$，与 k 的最小性矛盾，

因此假设不成立，集合 B 为空集.

【小问 3 详解】

猜想 $S=\{1,2\}$.

因为 $S_1=\{1,2\}$，以下只需证对任意大于 1 的奇数 m，1，$2\in S_m$，

若 $a_j=1$，$j>1$，则 $a_{j-1}=2$，故只需证必存在 $a_j=1$，$j>1$.

由（2）知无穷数列 A_m 中所有的项都属于集合 $\{1，2，\cdots，2m\}$，

因此必存在 $i<j$，使得 $a_i=a_j$，取其中 i 的值最小的一组，

若 $a_i>1$，则 $a_i=a_j=K>1$；

若 $K>m$，则必有 $a_{i-1}=a_{j-1}=K-m>1$，与 i 的最小性矛盾；

若 $K\le m$，则必有 $a_{i-1}=a_{j-1}=2K$，也与 i 的最小性矛盾.

因此只能 $a_i=1$，因此 $a_j=a_1=1$，$j>1$，$a_{j-1}=2$，即 1，$2\in S_m$.

综上，$S=\{1,2\}$.

【点睛】求解新定义运算有关的题目，关键是理解和运用新定义的概念以及元算，利用化归和转化的数学思想方法，将不熟悉的数学问题，转化成熟悉的问题进行求解.

对于新型集合，首先要了解集合的特性，抽象特性和计算特性，抽象特性是将集合可近似的当作数列或者函数分析.计算特性，将复杂的关系通过找规律即可利用已学相关知识求解.