北京五中 2019—2020 学年度第一学期期中考试试卷

高三数学

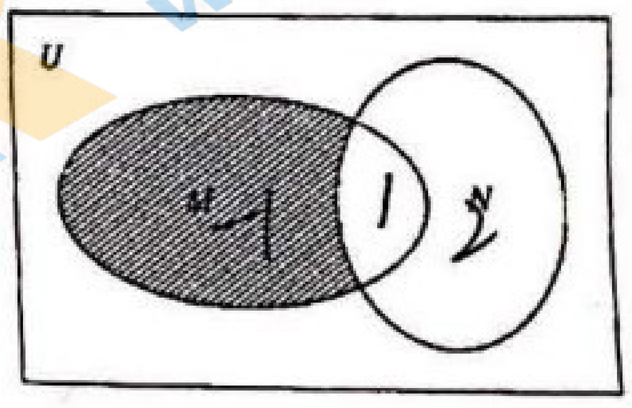
班级____________姓名____________学号____________成绩____________

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 集合 $M=\{x\mid x^2-1=0\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，全集为 U，

则图中阴影部分表示的集合是



A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\varnothing$

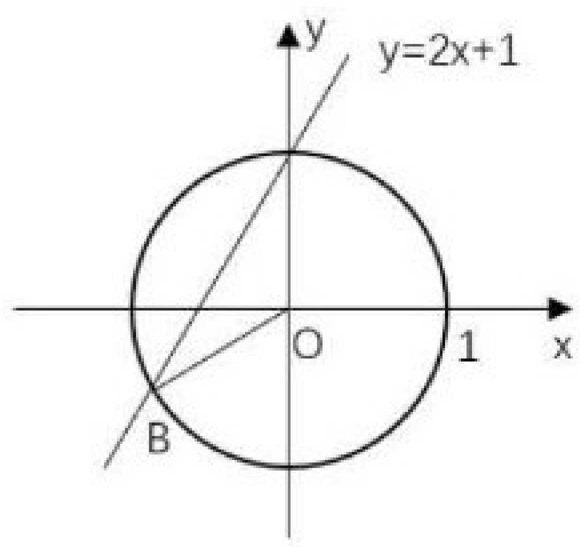
2. 已知函数 $f(x)=|x-2|$，$g(x)=kx$，若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(0,1)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(1,+\infty)$

3. 直线 $y=2x+1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 交于 A,B 两点，以 x 轴的正方向为始边，

OA 为终边（O 是坐标原点）的角为 α，OB 为终边的角为 β，则

$\sin(\alpha+\beta)=$



A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

4. 若 A,B 是锐角 △ABC 的两个内角，则点

$P(\cos B-\sin A,\sin B-\sin A)$ 在

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，a、$b\in R^+$，$A=f(\frac{a+b}{2})$，$B=f(\sqrt{ab})$，$c=f(\frac{2ab}{a+b})$，则 A、B、C 的大小关系为

A. $A\le B\le C$　　B. $A\le C\le B$　　C. $B\le C\le A$　　D. $C\le B\le A$

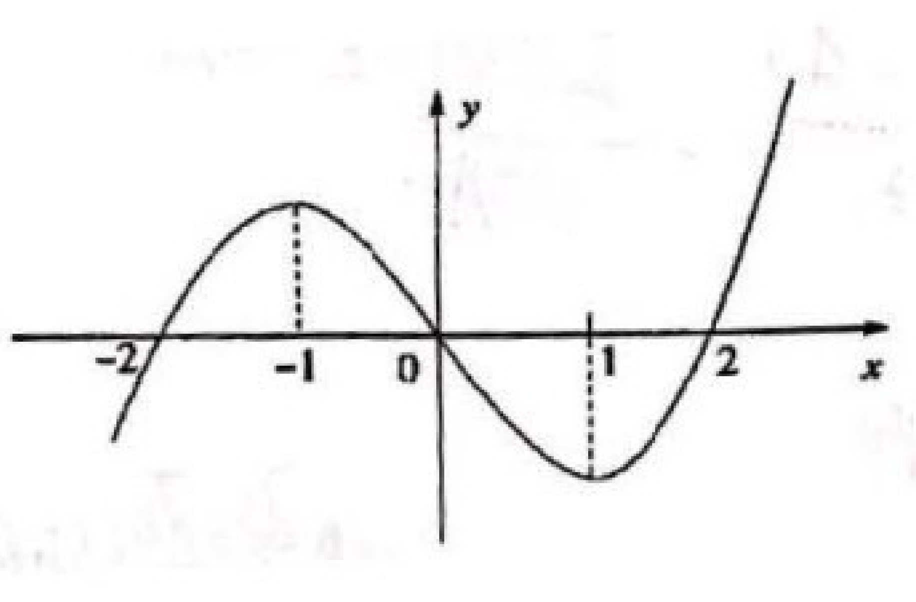
6. 已知 R 上可到函数 $f(x)$ 的图像如图所示，则不等式 $(x^2-2x-3)f'(x)>0$ 的解集为

A. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

B. $(-\infty,-2)\cup(1,2)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$



7. 设点 A,B,C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设 l_1, l_2, l_3 为空间中三条互相平行且两两间的距离分别为 4, 5, 6 的直线，给出下列三个结论：

①$\exists A_i \in l_i (i=1,2,3)$ 使得△ $A_1A_2A_3$ 是直角三角形；

②$\exists A_i \in l_i (i=1,2,3)$ 使得△ $A_1A_2A_3$ 是等边三角形；

③三条直线上存在四点 $A_i (i=1,2,3,4)$, 使得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为在一个顶点处的三条棱两两相互垂直的四面体.

其中，所有正确结论的序号是

A. ①　　　　B. ①②　　　　C. ①③　　　　D. ②③

第二部分（非选择题　　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 函数 $f(x)=1-2\sin^2 2x$ 的最小正周期是________.

10. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

11. 已知正方体的外接球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该正方体的体积为__________.

12. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，则向量$\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{b}$的夹角为_________.

13. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{2\pi}{3})(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可能有 3 个极大值点；

② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可能有 3 个极小值点；

③ $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{5\pi}{18})$ 单调递减；

其中所有正确结论的编号是__________.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)=3f(x)$, 且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$, 都有 $f(x)\ge -2$, 则 m 的取值范围是___________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题 13 分）

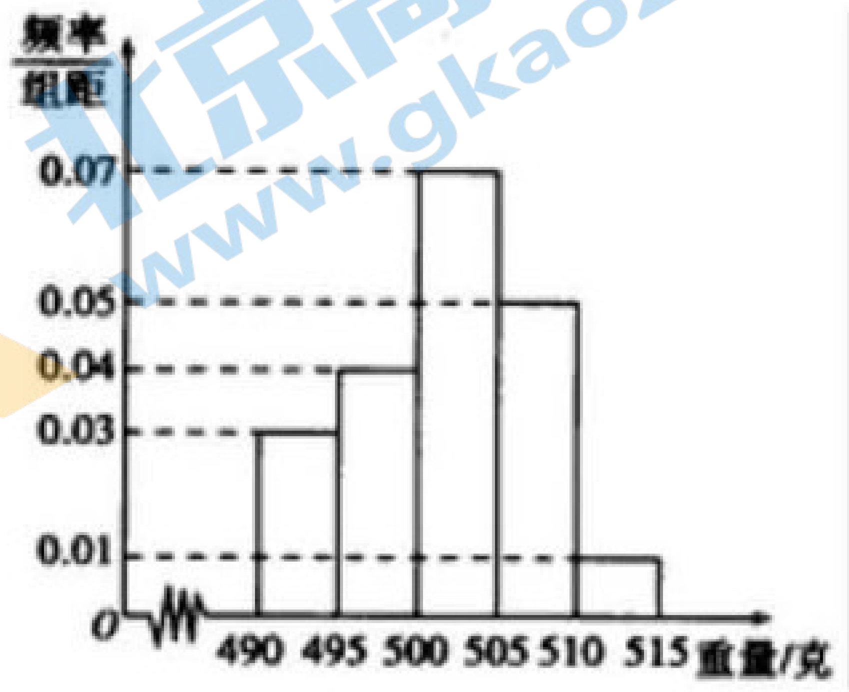
设锐角三角形 ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 $a,b,c,a=2b\sin A$

（Ⅰ）求 B 的大小

（Ⅱ）求 $\dfrac{\sin C}{\cos A}$ 的取值范围

16.（本小题 14 分）

某食品厂为了检查一条自动自装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上 40 件产品作为样本，称出它们的重量(单位:克)重量的分组区间为(490, 495]，(495, 500]，. . . ，(510, 515]. 由此得到样本的频率分布直方图，如图所示.



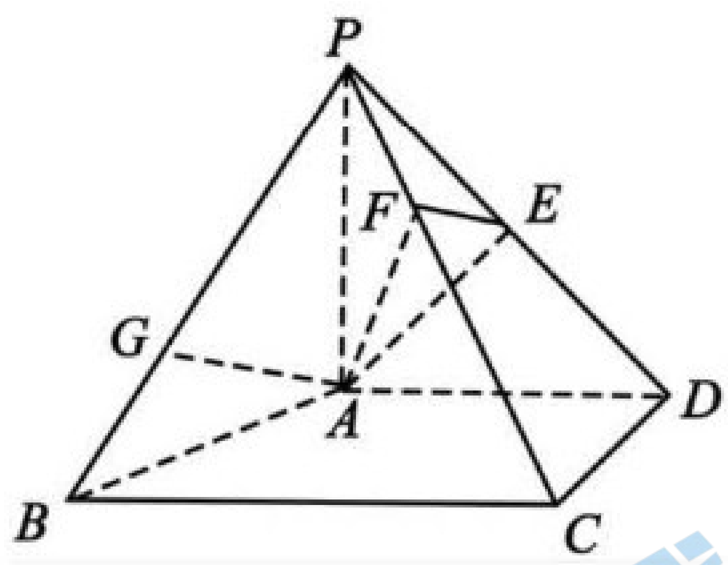
（Ⅰ）根据频率分布直方图，求重量超过 505 克的产品数量

（Ⅱ）从流水线上（可视为独立重复试验）抽取 5 件产品，求恰有 2 件产品的重量超过 505 克的概率;

（Ⅲ）在上述抽取的 40 件产品中重量超过 505 克的产品数量，求 X 的分布列和期望.

17.（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥平面 ABCD，AD⊥CD，AD//BC，PA=AD=CD=3，BC=4，E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$;



（Ⅰ）求证：CD⊥平面 PAD;

（Ⅱ）求二面角 F-AE-P 的余弦值

（Ⅲ）设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由.

18.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=6\ln x(x>0)$ 和 $g(x)=ax^2+8x-b$ （a,b 为常数）的图像在 $x=3$ 处有公切线。

（Ⅰ）求实数 a 的值;

（Ⅱ）求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的极大值和极小值;

（Ⅲ）关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有几个不同的实数解？

19（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的上顶点为 A，左、右焦点为 F_1,F_2，直线 AF_2 与圆 $M:x^2+y^2-6x-2y+7=0$ 相切.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程

（Ⅱ）若椭圆内存在动点 P。使 $|PF_1|,|PO|,|PF_2|$ 成等比数列（0 为坐标原点），求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围

20（本小题 13 分）

已知集合 $A_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\ldots,n)\}.x,y\in A_n$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, 其中 $x_i,y_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\ldots,n)$.

定义 $x\bigcirc y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$. 若 $x\bigcirc y$, 则称 x 与 y 正交.

（Ⅰ）若 $x=(1,1,1,1)$，写出 A_4 中与 x 正交的所有元素；

（Ⅱ）令 $B=\{xOy\,|\,x,y\in A_n\}$, 若 $m\in B$，证明：$m+n$ 为偶数

（Ⅲ）若 $A\subseteq A_n$，且 A 中任意两个元素均正交，分别求出 $n=8,14$ 时，A 中最多可以有多少个元素.