学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线 内 不 要 答 题

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第一学期期末试卷

高三数学(理科)

2018.1

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 若集合 $A=\{x|0<x<3\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x|-1<x<3\}$　　(B) $\{x|-1<x<0\}$

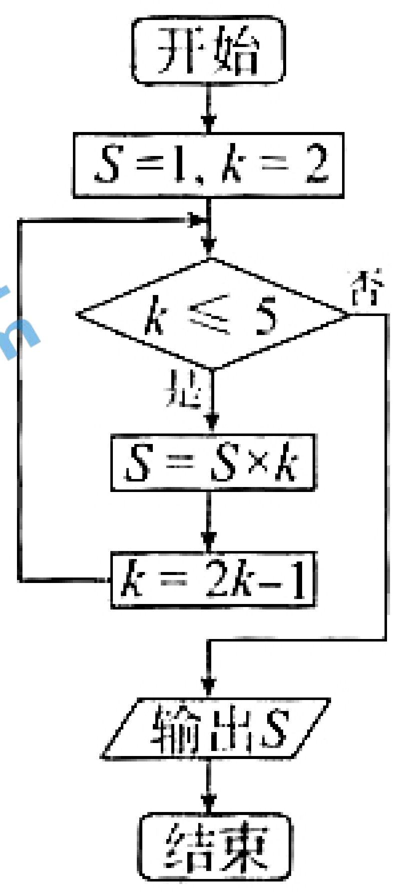
(C) $\{x|0<x<2\}$　　(D) $\{x|2<x<3\}$

2. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y=-x+1$　　(B) $y=|x-1|$

(C) $y=\sin x$　　(D) $y=x^{\frac{1}{2}}$

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为



(A) 2

(B) 6

(C) 30

(D) 270

4. 已知 M 为曲线 $C:\begin{cases}x=3+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数）上的动点. 设 O 为原点，则 $|OM|$ 的最大值是

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. 实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $2x-y$ 的取值范围是

(A) $[0,2]$　　(B) $(-\infty,0]$　　(C) $[-1,2]$　　(D) $[0,+\infty)$

6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线．则“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知 A，B 是函数 $y=2^x$ 的图象上的相异两点．若点 A，B 到直线 $y=\frac{1}{2}$ 的距离相等，则点 A，B 的横坐标之和的取值范围是

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(-\infty,-2)$　　(C) $(-1,+\infty)$　　(D) $(-2,+\infty)$

8. 在标准温度和大气压下，人体血液中氢离子的物质的量的浓度（单位 mol/L，记作 $[H^+]$）和氢氧根离子的物质的量的浓度（单位 mol/L，记作 $[OH^-]$）的乘积等于常数 10^{-14}．已知 pH 值的定义为 $pH=-\lg[H^+]$，健康人体血液的 pH 值保持在 7.35～7.45之间，那么健康人体血液中的 $\frac{[H^+]}{[OH^-]}$ 可以为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D) $\frac{1}{10}$

第Ⅱ卷(非选择题　共 110 分)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

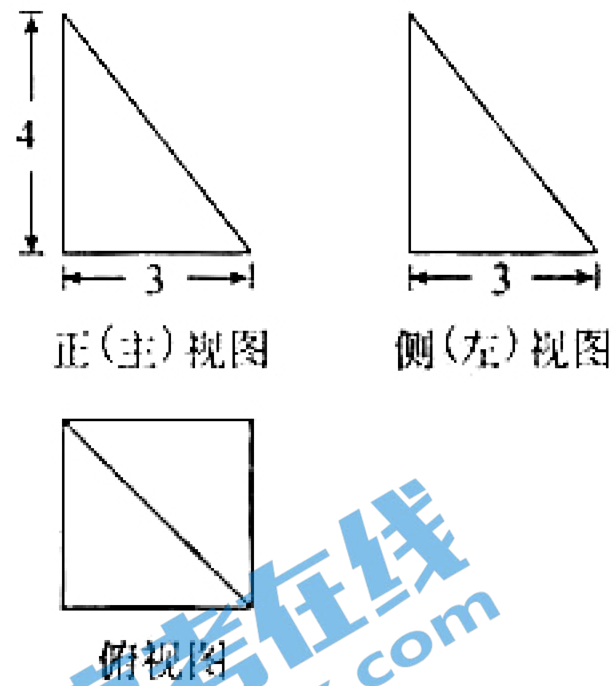
9. 在复平面内，复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为____.

10. 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n. 若 $a_2=\dfrac{1}{2}$，则 $a_n=$____；$S_5=$____.

11. 在△ABC 中，$a=3$，$\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$，△ABC 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，则 $c=$____.

12. 把 4 件不同的产品摆成一排. 若其中的产品 A 与产品 B 都摆在产品 C 的左侧，则不同的摆法有____种.(用数字作答)

13. 从一个长方体中截取部分几何体，得到一个以原长方体的部分顶点为顶点的凸多面体，其三视图如图所示. 该几何体的表面积是____.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & -2\leqslant x\leqslant c, \\ \dfrac{1}{x}, & c<x\leqslant 3. \end{cases}$ 若 $c=0$，则 $f(x)$ 的值域是____；若 $f(x)$ 的值域是 $[-\dfrac{1}{4}, 2]$，则实数 c 的取值范围是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin^2 x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

16.（本小题满分 13 分）

已知表 1 和表 2 是某年部分日期的天安门广场升旗时刻表.

表 1：某年部分日期的天安门广场升旗时刻表

日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻
1 月 1 日	7:36	4 月 9 日	5:46	7 月 9 日	4:53	10 月 8 日	6:17
1 月 21 日	7:31	4 月 28 日	5:19	7 月 27 日	5:07	10 月 26 日	6:36
2 月 10 日	7:14	5 月 16 日	4:59	8 月 14 日	5:24	11 月 13 日	6:56
3 月 2 日	6:47	6 月 3 日	4:47	9 月 2 日	5:42	12 月 1 日	7:16
3 月 22 日	6:15	6 月 22 日	4:46	9 月 20 日	5:59	12 月 20 日	7:31

表 2：某年 2 月部分日期的天安门广场升旗时刻表

日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻
2 月 1 日	7:23	2 月 11 日	7:13	2 月 21 日	6:59
2 月 3 日	7:22	2 月 13 日	7:11	2 月 23 日	6:57
2 月 5 日	7:20	2 月 15 日	7:08	2 月 25 日	6:55
2 月 7 日	7:17	2 月 17 日	7:05	2 月 27 日	6:52
2 月 9 日	7:15	2 月 19 日	7:02	2 月 28 日	6:49

（Ⅰ）从表 1 的日期中随机选出一天，试估计这一天的升旗时刻早于 7:00 的概率；

（Ⅱ）甲，乙二人各自从表 2 的日期中随机选择一天观看升旗，且两人的选择相互独立. 记 X 为这两人中观看升旗的时刻早于 7:00 的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）将表 1 和表 2 中的升旗时刻化为分数后作为样本数据（如 7:31 化为 $7\frac{31}{60}$）. 记表 2 中所有升旗时刻对应数据的方差为 s^2，表 1 和表 2 中所有升旗时刻对应数据的方差为 s_*^2，判断 s^2 与 s_*^2 的大小.（只需写出结论）

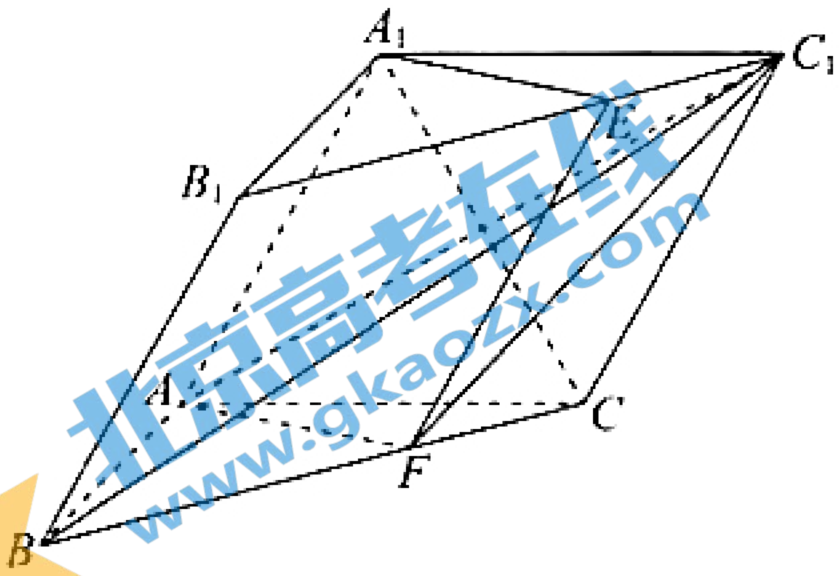
17.（本小题满分 14 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp$ 平面 AA_1C_1C，$AA_1=AB=AC=2$，$\angle A_1AC=60^\circ$．过 AA_1 的平面交 B_1C_1 于点 E，交 BC 于点 F．

（Ⅰ）求证：$A_1C\perp$ 平面 ABC_1；

（Ⅱ）求证：四边形 AA_1EF 为平行四边形；

（Ⅲ）若 $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{2}{3}$，求二面角 $B-AC_1-F$ 的大小．



18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}\cdot\sin x-1$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：$f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰有 2 个零点．

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $A(2,0)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+\sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 M，N 两点．若直线 $x=3$ 上存在点 P，使得四边形 $PAMN$ 是平行四边形，求 k 的值．

20.（本小题满分 13 分）

数列 A_n：$a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\geq 4)$ 满足：$a_1=1$，$a_n=m$，$a_{k+1}-a_k=0$ 或 $1\ (k=1,2,\cdots,n-1)$．对任意 i，j，都存在 s，t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i, j, s, t\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且两两不相等．

（Ⅰ）若 $m=2$，写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号；

①1，1，1，2，2，2；　②1，1，1，1，2，2，2，2；　③1，1，1，1，1，2，2，2，2

（Ⅱ）记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$．若 $m=3$，证明：$S\geq 20$；

（Ⅲ）若 $m=2018$，求 n 的最小值．

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第一学期期末

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2018.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．A	2．D	3．C	4．D
5．D	6．C	7．B	8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$(-1,1)$	10．2^{n-3}，$\frac{31}{4}$	11．$\sqrt{13}$
12．8	13．36	14．$[-\frac{1}{4},+\infty)$；$[\frac{1}{2},1]$

注：第 10，14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin^2 x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

$=1-\cos 2x-(\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3})$　　[4 分]

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x+1$　　[5 分]

$=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$，　　[7 分]

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．　　[8 分]

（Ⅱ）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$．　　[10 分]

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，　　[11 分]

$f(x)$ 取得最大值为 $\sqrt{3}+1$．　　[13 分]

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 A 为“从表 1 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于 7:00”， [1 分]

在表 1 的 20 个日期中，有 15 个日期的升旗时刻早于 7:00，

所以 $P(\mathrm{A})=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$． [3 分]

（Ⅱ）X 可能的取值为 $0,1,2$． [4 分]

记事件 B 为“从表 2 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于 7:00”，

则 $P(\mathrm{B})=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$，$P(\overline{\mathrm{B}})=1-P(\mathrm{B})=\frac{2}{3}$． [5 分]

$P(X=0)=P(\overline{\mathrm{B}})\cdot P(\overline{\mathrm{B}})=\frac{4}{9}$；　　$P(X=1)=\mathrm{C}_2^1(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$；

$P(X=2)=P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B})=\frac{1}{9}$． [8 分]

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$． [10 分]

注：学生得到 $X\sim B(2,\frac{1}{3})$，所以 $E(X)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，同样给分．

（Ⅲ）$s^2<s_*^2$． [13 分]

17.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C，所以 $A_1C\perp AB$． [1 分]

因为 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AC$，所以 四边形 AA_1C_1C 为菱形，

所以 $A_1C\perp AC_1$． [3 分]

所以 $A_1C\perp$ 平面 ABC_1． [4 分]

（Ⅱ）因为 $A_1A//B_1B$，$A_1A\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $A_1A//$ 平面 BB_1C_1C． [5 分]

因为平 面 $AA_1EF\cap$ 平面 $BB_1C_1C=EF$，所以 $A_1A//EF$． [6 分]

因为 平面 $ABC//$ 平面 $A_1B_1C_1$，

平面 $AA_1EF\cap$ 平面 $ABC=AF$，平面 $AA_1EF\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1E$，

所以 $A_1E//AF$． [7 分]

所以 四边形 AA_1EF 为平行四边形． [8 分]

（Ⅲ）在平面 AA_1C_1C 内，过 A 作 $Az\perp AC$．

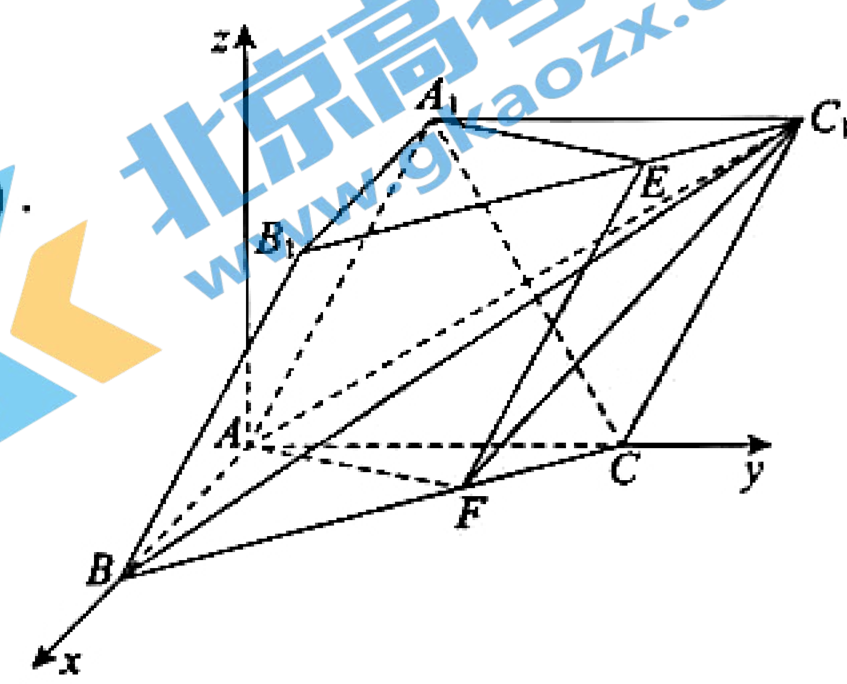
因为 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.　　　　　　　　　　　　　　　　[9 分]

由题意得，$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,1,\sqrt{3})$，$C_1(0,3,\sqrt{3})$.

因为 $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{BF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},0)$，

所以 $F(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},0)$.



由（Ⅰ）得平面 ABC_1 的法向量为 $\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设平面 AC_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$　即 $\begin{cases}3y+\sqrt{3}z=0,\\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=-2$，$z=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(-2,1,-\sqrt{3})$.　　　　　　　　[11 分]

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　　　　　　　[13 分]

由图知 二面角 $B-AC_1-F$ 的平面角是锐角，

所以 二面角 $B-AC_1-F$ 的大小为 45° .　　　　　　　　[14 分]

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x\cdot\sin x-1$，

所以 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.　　　　　　　　[2 分]

因为 $f'(0)=1$，$f(0)=-1$，　　　　　　　　[4 分]

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.　　　　　　　　[5 分]

（Ⅱ）$f'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$.　　　　　　　　[6 分]

由 $f'(x)=0$，得 $a\sin x+\cos x=0$.　　　　　　　　[7 分]

因为 $a>0$，所以 $f'(\dfrac{\pi}{2})\neq 0$.　　　　　　　　[8 分]

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，由 $a\sin x+\cos x=0$，得 $\tan x=-\dfrac{1}{a}$.

所以 存在唯一的 $x_0\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使得 $\tan x_0=-\dfrac{1}{a}$.　　　　　　　　[9 分]

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的情况如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	(x_0,π)
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在区间 (x_0,π) 上单调递减. [11 分]

因为 $f(x_0)>f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{a\pi}{2}}-1>e^0-1=0$， [12 分]

且 $f(0)=f(\pi)=-1<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰有 2 个零点. [13 分]

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $a=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， 所以 $c=\sqrt{3}$. [2 分]

因为 $a^2=b^2+c^2$， [3 分]

所以 $b=1$， [4 分]

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. [5 分]

（Ⅱ）若四边形 $PAMN$ 是平行四边形，

则 $PA//MN$，且 $|PA|=|MN|$. [6 分]

所以 直线 PA 的方程为 $y=k(x-2)$，

所以 $P(3,k)$，$|PA|=\sqrt{k^2+1}$. [7 分]

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx+\sqrt{3}, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8\sqrt{3}kx+8=0$， [8 分]

由 $\Delta>0$，得 $k^2>\frac{1}{2}$.

且 $x_1+x_2=-\frac{8\sqrt{3}k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8}{4k^2+1}$. [9 分]

所以 $|MN|=\sqrt{(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

$$=\sqrt{(k^2+1)\frac{64k^2-32}{(4k^2+1)^2}}.$$ [10 分]

因为 $|PA|=|MN|$， 所以 $\sqrt{(k^2+1)\frac{64k^2-32}{(4k^2+1)^2}}=\sqrt{k^2+1}$.

整理得 $16k^4-56k^2+33=0$， [12 分]

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$. [13 分]

经检验均符合 $\Delta>0$，但 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时不满足 $PAMN$ 是平行四边形，舍去.

所以 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$. [14 分]

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）②③. [3 分]

注：只得到 ② 或只得到 ③ 给 [1 分]，有错解不给分.

（Ⅱ）当 $m=3$ 时，设数列 A_n 中 1,2,3 出现频数依次为 q_1,q_2,q_3，由题意 $q_i\geq 1\ (i=1,2,3)$.

① 假 设 $q_1<4$，则有 $a_1+a_2<a_s+a_t$（对任意 $s>t>2$），

与已知矛盾，所以 $q_1\geqslant 4$.

同理可证：$q_3\geqslant 4$. [5 分]

② 假 设 $q_2=1$，则存在唯一的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $a_k=2$.

那么，对 $\forall s,t$，有 $a_1+a_k=1+2\neq a_s+a_t$（k,s,t 两两不相等），

与已知矛盾，所以 $q_2\geq 2$. [7 分]

综上：$q_1\geqslant 4,q_3\geqslant 4,q_2\geqslant 2$，

所以 $S=\sum_{i=1}^{3}iq_i\geqslant 20$. [8 分]

（III）设$1,2,\cdots,2018$出现频数依次为$q_1,q_2,\ldots,q_{2018}$．

同（II）的证明，可得$q_1\geqslant 4,q_{2018}\geqslant 4$，$q_2\geqslant 2,q_{2017}\geqslant 2$，则$n\geqslant 2026$．

取$q_1=q_{2018}=4,q_2=q_{2017}=2$，$q_i=1,i=3,4,5,\cdots,2016$，得到的数列为：

$B_n:1,1,1,1,2,2,3,4,\cdots\cdots,2015,2016,2017,2017,2018,2018,2018,2018$． [10分]

下面证明B_n满足题目要求．对$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,2026\}$，不妨令$a_i\leqslant a_j$，

① 如果$a_i=a_j=1$或$a_i=a_j=2018$，由于$q_1=4,q_{2018}=4$，所以符合条件；

② 如果$a_i=1,a_j=2$或$a_i=2017,a_j=2018$，由于$q_1=4,q_{2018}=4$，$q_2=2,q_{2017}=2$，所以也成立；

③ 如果$a_i=1,a_j>2$，则可选取$a_s=2,a_t=a_j-1$；同样的，如果$a_i<2017,a_j=2018$，则可选取$a_s=a_i+1,a_t=2017$，使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，且i,j,s,t两两不相等；

④ 如果$1<a_i\leqslant a_j<2018$，则可选取$a_s=a_i-1,a_t=a_j+1$，注意到这种情况每个数最多被选取了一次，因此也成立．

综上，对任意i,j，总存在s,t，使得$a_i+a_j=a_s+a_t$，其中$i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$且两两不相等．因此$B_n$满足题目要求，所以$n$的最小值为$2026$． [13分]