太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数学试卷(文科)

(考试时间:下午3:00—5:00)

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,第Ⅰ卷1至4页,第Ⅱ卷5至8页。
2. 回答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数z满足$z=\dfrac{2i}{1+i}$,则其共轭复数$\bar{z}=$

A. $1-i$　　B. $1+i$

C. $-1-i$　　D. $-1+i$

2. 已知集合$A=\{x|x(x-1)=0\}$,$B=\{x||x|=1\}$,则$A\cap B=$

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{1\}$

3. 已知某次艺术体操比赛共有7位评委分别给出某选手的原始评分,评定该选手的成绩时,先从这7个原始评分中去掉1个最高分和1个最低分,最后得到5个有效评分,这5个有效评分与7个原始评分相比,它们不变的数字特征是

A. 众数　　B. 平均数

C. 中位数　　D. 方差

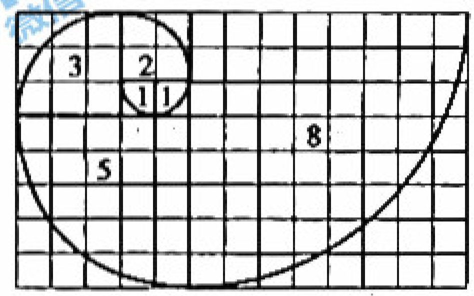
4. 已知斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋线”，它的画法是：以斐波那契数列（即$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$）的各项为边长的正方形拼成长方形，然后在每个正方形中画一个圆心角为90°的圆弧，将这些圆弧依次连起来的弧线就是斐波那契螺旋线. 自然界存在很多斐波拉契螺旋线的图案，例如向日葵、鹦鹉螺等. 下图为该螺旋线的一部分，则第七项所对应的扇形的弧长为

A. $\frac{169\pi}{4}$

B. $\frac{21\pi}{2}$

C. $\frac{13\pi}{2}$

D. 4π



5. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1 = \frac{1}{4}$，$a_2a_4 = 2a_3 - 1$，则$a_5 =$

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

6. 点$P(m, \sqrt{2}m)(m \neq 0)$是抛物线$y^2 = 2px(p > 0)$上一点，且点$P$到该抛物线焦点的距离为3，则$p =$

A. 1　　B. 2

C. $\frac{3}{2}$　　D. 6

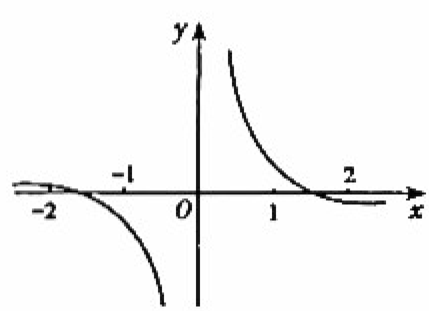
7. 已知函数$y = f(x)$部分图象的大致形状如图所示，则$y = f(x)$的解析式最可能是

A. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x - e^{-x}}$

B. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$

D. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$



8. 已知函数$f(x)=a^2x^3-x$在点$(1,f(1))$处的切线经过点$(2,6)$，则实数$a=$

A. ±1

B. ±2

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\pm\sqrt{2}$

9. 已知圆$M:(x-a)^2+(y-b)^2=3(a,b\in\mathbf{R})$与圆$O:x^2+y^2=1$相交于$A,B$两点，且$|AB|=\sqrt{3}$，则下列错误的结论是

A. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$是定值

B. 四边形$OAMB$的面积是定值

C. $a+b$的最小值为$-\sqrt{2}$

D. $a\cdot b$的最大值为2

10. 在直角$\triangle ABC$中，a,b,c分别是$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边，点G是$\triangle ABC$的重心，若$AG\perp BG$，则$\cos C=$

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\dfrac{3}{5}$

D. $\dfrac{4}{5}$

11. 已知三棱锥$A-BCD$中，$AB=BD=DA=2\sqrt{3}$，$BC\perp CD$，$BC=CD$，则当三棱锥$A-BCD$的体积最大时，其外接球的表面积为

A. 48π

B. 28π

C. 16π

D. 20π

12. 已知直线$x-2y+n=0(n\neq0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别相交于$A,B$两点，点$P$的坐标为$(n,0)$，若$|PA|=|PB|$，则该双曲线的离心率是

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数 学 试 卷(文科)

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

答. 第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知a,b是单位向量,且$|a+b|=\sqrt{3}$,则$|a-b|=$________.

14. 已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$,则$\sin2\alpha=$________.

$M(x,y)$,不等式$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}\geqslant\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$(其中$O$是坐标原点)恒成立,则实数$m=$________.

使得平面$PAB\perp$平面ABC,过P作$PG\perp AB$,垂足为G,则AG的取值范围为________.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

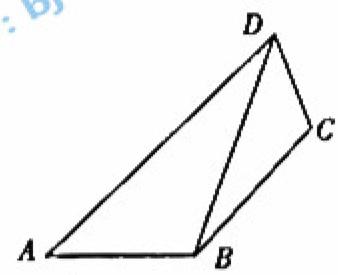
（一）必考题：共60分．

17.（本小题满分12分）

如图，在平面四边形$ABCD$中，$\angle BAD=45°$，$AB=\sqrt{2}$，$\triangle ABD$的面积为$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$．

（Ⅰ）求BD的长；

（Ⅱ）若$\angle BCD=120°$，求$BC+CD$的取值范围．



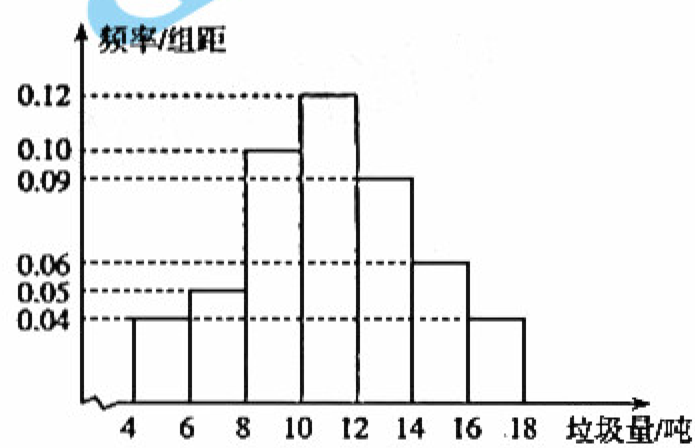
18.（本小题满分12分）

2017年国家发改委、住建部发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定46个城市在2020年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达35%以上．某市在实施垃圾分类之前，对人口数量在1万左右的社区一天产生的垃圾量（单位：吨）进行了调查．已知该市这样的社区有200个，下图是某天从中随机抽取50个社区所产生的垃圾量绘制的频率分布直方图．现将垃圾量超过14吨/天的社区称为“超标”社区．

（Ⅰ）根据上述资料，估计当天这50个社区垃圾量的平均值$\bar{x}$（精确到整数）；

（Ⅱ）若以上述样本的频率近似代替总体的概率，请估计这200个社区中“超标”社区的个数．

（Ⅲ）市环保部门决定对样本中“超标”社区的垃圾来源进行调查，先从这些社区中按垃圾量用分层抽样抽取5个，再从这5个社区随机抽取2个进行重点监控，求重点监控社区中至少有1个垃圾量为$[16,18]$的社区的概率．

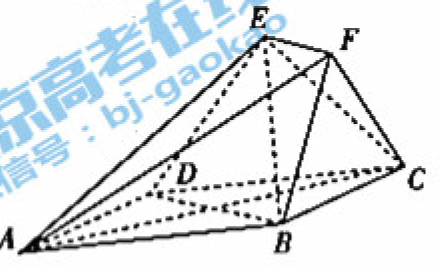


19.（本小题满分12分）

如图，在几何体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$是边长为2的菱形，且$\angle BAD=60^\circ$，$CE=DE$，$EF\ /\!/\ DB$，$DB=2EF$，平面$CDE\perp$平面$ABCD$.

（Ⅰ）求证：平面$BCF\perp$平面$ABCD$；

（Ⅱ）若直线BE与平面$ABCD$所成的角为45°，求三棱锥$A-CEF$的体积.



20.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=ax+1(a\in\mathbf{R})$，$g(x)=\sin x+\cos x$.

（Ⅰ）当$a=1$时，证明：不等式$f(x)\geqslant g(x)$在$[0,+\infty)$上恒成立；

（Ⅱ）若不等式$f(x)\geqslant g(x)$在$[-\frac{\pi}{4},+\infty)$上恒成立，求实数a取值的集合.

21.（本小题满分12分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别是点$A$，$B$，直线$l$：$x=\frac{2}{3}$与椭圆$C$相交于$D$，$E$两个不同点，直线$DA$与直线$DB$的斜率之积为$-\frac{1}{4}$，$\triangle ABD$的面积为$\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）若点P是直线l：$x=\frac{2}{3}$的一个动点（不在x轴上），直线AP与椭圆C的另一个交点为Q，过P作BQ的垂线，垂足为M，在x轴上是否存在定点N，使得$|MN|$为定值，若存在，请求出点N的坐标；若不存在，请说明理由.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.(本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系xOy中,曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$($t$为参数),以坐标原点$O$为极点,$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅰ)求曲线C的普通方程和直线l的直角坐标方程;

(Ⅱ)已知点A在曲线C上,且点A到直线l的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,求点A的直角坐标.

23.(本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数$f(x)=|x+m^2|+|2x-m|(m>0)$.

(Ⅰ)当$m=1$时,求不等式$f(x)\leqslant 6$的解集;

(Ⅱ)若$f(x)$的最小值为$\dfrac{3}{2}$,且$a+b=m(a>0,b>0)$,求证:$\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{5}$.

太原市2021年高三年级模拟考试（二）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一．选择题： A D C C B B　A D C B C C

二．填空题： 13. 1　　14. $\frac{7}{9}$　　15. -2　　16. $[\frac{9}{4},3)$

三．解答题：

17.（Ⅰ）证明：在ΔABD中，$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$\therefore AD=1+\sqrt{2}$，　……3分

由余弦定理得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=3$，$\therefore BD=\sqrt{3}$；　……6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$BD=\sqrt{3}$，设$\angle BDC=\alpha(0<\alpha<60^\circ)$，

由$\angle BCD=120^\circ$和正弦定理得$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{CD}{\sin(60^\circ-\alpha)}=\frac{BD}{\sin 120^\circ}=2$，　………8分

$\therefore BC+CD=2[\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)]=2\sin(\alpha+60^\circ)$，　………10分

$\because 0<\alpha<60^\circ$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\alpha+60^\circ)\le 1$，$\therefore \sqrt{3}<BC+CD\le 2$，

$\therefore BC+CD$的取值范围为$(\sqrt{3},2]$．　………12分

18解：（Ⅰ）由频率分布直方图得该样本中垃圾量为$[4,6)$，$[6,8)$，$[8,10)$，$[10,12)$，$[12,14)$，$[14,16)$，$[16,18]$的频率分别为$0.08,0.1,0.2,0.24,0.18,0.12,0.08$，

$\bar{x}=5\times0.08+7\times0.10+9\times0.20+11\times0.24+13\times0.18+15\times0.12+17\times0.08=11.04\approx 11$，
所以当天这50个社区垃圾量的平均值为11吨；　………4分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得该样本中“超标”社区的频率为$0.12+0.08=0.2$，

所以这200个社区中“超标”社区的概率为0.2，

所以这200个社区中“超标”社区的个数为$200\times0.2=40$；　………7分

（Ⅲ）由题意得样本中“超标”社区共有$50\times(0.12+0.08)=10$个，其中垃圾量为$[14,16)$的社区有$50\times0.12=6$个，垃圾量为$[16,18)$的社区有$50\times0.08=4$个，按垃圾量用分层抽样抽取的5个社区中，垃圾量为$[14,16)$的社区有3个，分别记为a,b,c；垃圾量为$[16,18)$的社区有2个，分别记为d,e，　………9分

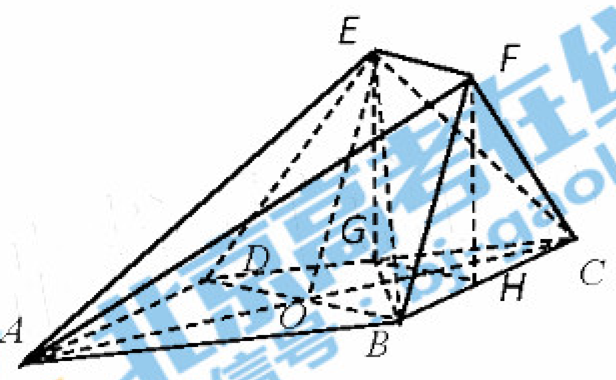
从中选取2个的基本事件为(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，(b,c)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共10个；其中所求事件“至少有1个垃圾量为$[16,18]$的社区”为(a,d)，(a,e)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共7个；

所以至少有1个垃圾量为$[16,18)$的社区的概率为$p=0.7$．　………12分

19.（Ⅰ）证明：设点G,H分别是CD,CB的中点，连结EG,FH,GH，

则$GH\,//\,DB$，且$DB=2GH$，$\because EF\,//\,DB$，且$DB=2EF$，$\therefore EF\,//\,GH$，且$EF=GH$，

$\therefore EFHG$ 平行四边形，$\therefore FH\,//\,EG$，　　………1 分



$\because CE=DE$，$\therefore EG\perp CD$，

$\because$ 平面 $CDE\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EG\perp$ 平面 $ABCD$，　　………3 分

$\therefore FH\perp$ 平面 $ABCD$，$\because FH\subset$ 平面 BCF，

$\therefore$ 平面 $BCF\perp$ 平面 $ABCD$；　　………6 分

（Ⅱ）连结 BG，由（Ⅰ）得 $EG\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because$ 直线 BE 与平面 $ABCD$ 的所成角为 $45°$，$\therefore \angle EBG=45°$，$\therefore BG=EG$，　………8 分

设 $AC\cap BD=O$，连结 OE，易得 $OEFB$ 是平行四边形，$\therefore OE\,//\,BF$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形，且 $\angle BAD=60°$，

$\therefore \Delta BCD$ 是边长为2的等边三角形，$\therefore BG=\sqrt{3}$，

$\therefore V_{A-CEF}=V_{F-ACE}=V_{B-ACE}=V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EG=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot EG=1$.　　………12 分

20.（Ⅰ）证明：当 $a=1$ 时，令 $h(x)=f(x)-g(x)=x+1-\sin x-\cos x$，$x\in\mathrm{R}$，

则 $h'(x)=1-\cos x+\sin x$，

（1）当 $0\le x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，则 $h'(x)=1-\cos x+\sin x>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递增，$\therefore h(x)\ge h(0)=0$，$\therefore f(x)\ge g(x)$，　　………3 分

（2）当 $x\ge\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\therefore h(x)=x+1-\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\ge\dfrac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}>0$，$\therefore f(x)\ge g(x)$；

综上所述，当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)\ge g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立；　　………5 分

（Ⅱ）令 $t(x)=f(x)-g(x)=ax+1-\sin x-\cos x$，$x\ge-\dfrac{\pi}{4}$，

则 $t'(x)=a-\cos x+\sin x$，

（1）当 $x\ge0$ 时，由题意得 $t(x)\ge0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$\because t(0)=0$，$\therefore t'(0)=a-1\ge0$，$\therefore a\ge1$；

当 $a\ge1$ 时，由（Ⅰ）得 $t(x)=ax+1-\sin x-\cos x\ge x+1-\sin x-\cos x\ge0$，

$\therefore$ 当 $t(x)\ge0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立时 $a\ge1$；　　………8 分

（2）当 $-\dfrac{\pi}{4}\le x<0$ 时，由题意得 $t(x)\ge0$ 在 $[-\dfrac{\pi}{4},0)$ 上恒成立，

$\because t(0)=0$，$\therefore t'(0)=a-1\le0$，$\therefore a\le1$，

当 $a\le1$ 时，$t(x)=ax+1-\sin x-\cos x\ge x+1-\sin x-\cos x$，

由（Ⅰ）得 $h'(x)=1-\cos x+\sin x=1+\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})<0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 上单调递减，$\therefore h(x)\ge h(0)=0$，$\therefore t(x)\ge 0$，

$\therefore$ 当 $t(x)\ge 0$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 上恒成立时 $a\le 1$；　　　　………11 分

综上所述，实数 a 取值的集合为 $\{1\}$．　　　　………12 分

21 解：（Ⅰ）设 $D(\frac{2}{3},y_0)$，由题意得 $\begin{cases} k_{DA}\cdot k_{DB}=\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}+a}\cdot\dfrac{y_0}{\frac{2}{3}-a}=-\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\times 2a\times|y_0|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, \\ \dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1, \end{cases}$　　　　………3 分

$\therefore \begin{cases} b^2=1, \\ a^2=4, \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；　　　　………5 分

（Ⅱ）假设存在这样的点 N，设直线 PM 与 x 轴相交于点 T $(x_0,0)$，由题意得 $TP\perp BQ$，

由（Ⅰ）得 $B(2,0)$，设 $P(\frac{2}{3},t)$，$Q(x_1,y_1)$，由题意可设直线 AP 的方程为 $x=my-2$，

由 $\begin{cases} x=my-2, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2-4my=0$，$\therefore y_1=\frac{4m}{m^2+4}$ 或 $y_1=0$（舍去），$x_1=\frac{2m^2-8}{m^2+4}$，　……7 分

$\because \frac{2}{3}=mt-2$，$\therefore t=\frac{8}{3m}$，

$\because TP\perp BQ$，$\therefore \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\frac{2}{3}-x_0)(x_1-2)+ty_1=0$，

$\therefore x_0=\frac{2}{3}+\frac{ty_1}{x_1-2}=\frac{2}{3}+\frac{8}{3m}\cdot\frac{4m}{m^2+4}\cdot\frac{m^2+4}{-16}=0$，　　　　………10 分

$\therefore$ 直线 PM 过定点 T $(0,0)$，

$\therefore$ 存在定点 $N(1,0)$，使得 $|MN|=1$．　　　　………12 分

22 解：（Ⅰ）将 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$ 的参数 t 消去得曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(y\ne 1)$，……3 分

$\because \rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 可得直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$；　　　　………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得曲线 C 的参数方程可表示为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）$(\theta\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z)$，

设 $A(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$，则点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　　………7 分

$\therefore \sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=0$ 或 $\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{3}\cos(\theta+\varphi)=2$（其中 $\tan\varphi=\sqrt{2}$）（舍去），

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore \cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$A(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$；当 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$A(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$．　　………10 分

23 解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时，原不等式为 $|x+1|+|2x-1|\le 6$，

$\begin{cases} x<-1, \\ -(x+1)-(2x-1)\le 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\le x\le\dfrac{1}{2}, \\ x+1-(2x-1)\le 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x+1+2x-1\le 6, \end{cases}$　　………3 分

$\therefore -2\le x<-1$ 或 $-1\le x\le\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x\le 2$

$\therefore$ 原不等式 $f(x)\le 6$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 2\}$；　　………5 分

（Ⅱ）由题意得 $f(x)=\begin{cases} -3x-m^2+m, x<-m^2, \\ -x+m^2+m, -m^2\le x\le\dfrac{m}{2}, \\ 3x+m^2-m, x>\dfrac{m}{2}, \end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=f(\dfrac{m}{2})=m^2+\dfrac{1}{2}m=\dfrac{3}{2}$，$\therefore m=1$ 或 $m=-\dfrac{3}{2}$（舍去），　　………7 分

$\therefore a+b=1$，令 $\begin{cases} a=\cos^2\theta, \\ b=\sin^2\theta \end{cases}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，

则 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\le\sqrt{5}$，

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ $(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\tan\varphi=\dfrac{1}{2})$ 时，上述不等式取等号．　　………10 分

注：以上各题其他解法，请酌情给分．