2018 年石景山区高三统一测试

数学（理）试卷

考生须知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，20 道小题，满分 150 分．考试时间 120 分钟． 2．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.设集合 $A=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0\}$，集合 $B=\{x\,|\,1<x<3\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x\,|\,-1<x<3\}$　　B．$\{x\,|\,-1<x<1\}$　　C．$\{x\,|\,1<x<2\}$　　D．$\{x\,|\,2<x<3\}$

2.下列函数中既是奇函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的函数为（　　）

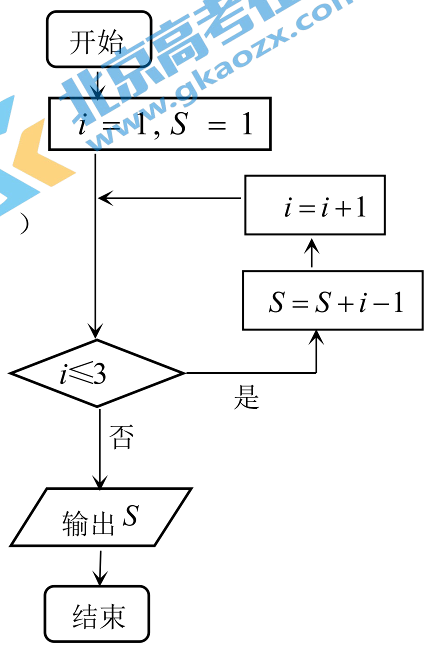
A．$y=\sqrt{x}$　　B．$y=-x^3$

C．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D．$y=x+\dfrac{1}{x}$

3.执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是（　　）

A．1　　B．2

C．4　　D．7



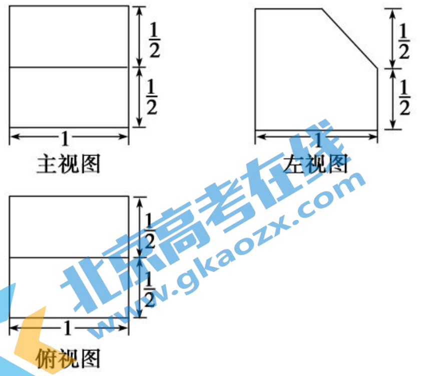
4.在 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．4

C．$2\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{2}$

5.若某多面体的三视图（单位：cm）如图所示，

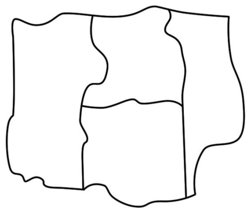
则此多面体的体积是（　　）



A. $\frac{7}{8}cm^3$　　　　B. $\frac{2}{3}cm^3$

C. $\frac{5}{6}cm^3$　　　　D. $\frac{1}{2}cm^3$

6.现有 4 种不同颜色对如图所示的四个部分进行涂色，要求有公共边界的两块不能用同一种颜色，则不同的涂色方法共有（　　）



A．24 种　　B．30 种　　C．36 种　　D．48 种

7.设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$a|a|>b|b|$”的（　　）

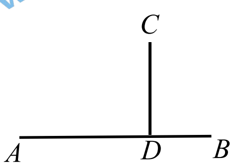
A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　D．既不充分又不必要条件

8.如图，已知线段 AB 上有一动点 D（D 异于 A、B），线段 $CD\perp AB$，且满足 $CD^2=\lambda AD\cdot BD$（λ 是大于 0 且不等于 1 的常数），则点 C 的运动轨迹为（　　）

A．圆的一部分　　　　B．椭圆的一部分

C．双曲线的一部分　　D．抛物线的一部分



第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

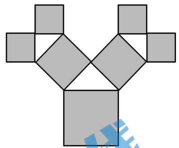
9.双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦距是________，渐近线方程是________.

10.若变量 x,y 满足 $\begin{cases} x+y\leqslant 2, \\ 2x-3y\leqslant 9, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最大值是____________.

11.已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta+2, \end{cases}$ （θ 为参数），以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线的极坐标方程为 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=1$，则直线截圆 C 所得的弦长是____________.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, x\geqslant 1 \\ x^3, x<1 \end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有两个不同零点，则 k 的取值范围是____________.

13.如图所示：正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形腰上再连接正方形，…，如此继续下去得到一个树形图形，称为“勾股树”．若某勾股树含有1023个正方形，且其最大的正方形的边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则其最小正方形的边长为________.



14.设 W 是由一平面内的 $n(n\geqslant 3)$ 个向量组成的集合．若 $\vec{a}\in W$，且 $\vec{a}$ 的模不小于 W 中除 $\vec{a}$ 外的所有向量和的模．则称 $\vec{a}$ 是 W 的极大向量.有下列命题：

①若 W 中每个向量的方向都相同，则 W 中必存在一个极大向量；

②给定平面内两个不共线向量 $\vec{a},\vec{b}$，在该平面内总存在唯一的平面向量 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$，使得 $W=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 中的每个元素都是极大向量；

③若 $W_1=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$，$W_2=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ 中的每个元素都是极大向量，且 W_1,W_2 中无公共元素，则 $W_1\cup W_2$ 中的每一个元素也都是极大向量.

其中真命题的序号是____________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的最小值和最大值.

16．（本小题共 13 分）

抢"微信红包"已经成为中国百姓欢度春节时非常喜爱的一项活动．小明收集班内 20 名同学今年春节期间抢到红包金额 x（元）如下（四舍五入取整数）：

102	52	41	121	72
162	50	22	158	46
43	136	95	192	59
99	22	68	98	79

对这 20 个数据进行分组，各组的频数如下：

组别	红包金额分组	频数
A	$0\leqslant x<40$	2
B	$40\leqslant x<80$	9
C	$80\leqslant x<120$	m
D	$120\leqslant x<160$	3
E	$160\leqslant x<200$	n

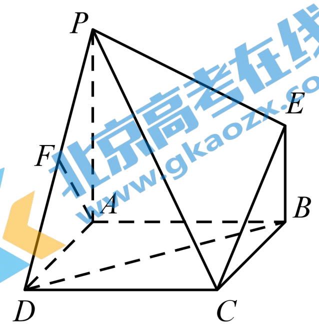
（Ⅰ）写出 m，n 的值，并回答这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在哪个组别；

（Ⅱ）记 C 组红包金额的平均数与方差分别为 v_1、s_1^2，E 组红包金额的平均数与方差分别为 v_2、s_2^2，试分别比较 v_1 与 v_2、s_1^2 与 s_2^2 的大小；（只需写出结论）

（Ⅲ）从 A，E 两组的所有数据中任取 2 个数据，记这 2 个数据差的绝对值为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望．

17．（本小题共 14 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$EB // PA$，$AB=PA=4$，$EB=2$，F 为 PD 的中点．



（Ⅰ）求证：$AF\perp PC$；

（Ⅱ）求证：$BD //$平面 PEC；

（Ⅲ）求二面角 $D-PC-E$ 的大小．

18．（本小题共 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 E 到定点 $(1,0)$ 的距离与它到直线 $x=-1$ 的距离相等．

（Ⅰ）求动点 E 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）设动直线 $l: y=kx+b$ 与曲线 C 相切于点 P，与直线 $x=-1$ 相交于点 Q．

证明：以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上某定点．

19．（本小题共 14 分）

已知 $f(x)=e^x-ax^2$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+1$．

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值；

（Ⅲ）当 $x\in\mathbf{R}$ 时，判断 $y=f(x)$ 与 $y=bx+1$ 交点的个数.（只需写出结论，不要求证明）

20．（本小题共 13 分）

对于项数为 m （ $m>1$ ）的有穷正整数数列 $\{a_n\}$,记 $b_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ （ $k=1,2,\cdots,m$ ），即 b_k 为 $a_1,a_2,\cdots a_k$ 中的最大值，称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“创新数列”. 比如 $1,3,2,5,5$ 的“创新数列”为 $1,3,3,5,5$.

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 的“创新数列” $\{b_n\}$ 为 1,2,3,4,4，写出所有可能的数列 $\{a_n\}$ ；

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“创新数列”，满足 $a_k+b_{m-k+1}=2018$ （ $k=1,2,\cdots,m$ ），求证： $a_k=b_k$ （ $k=1,2,\cdots,m$ ）;

（Ⅲ）设数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“创新数列”，数列 $\{b_n\}$ 中的项互不相等且所有项的和等于所有项的积，求出所有的数列 $\{a_n\}$.

2018 年石景山区高三统一测试

数学（理）试卷答案及评分参考

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$2\sqrt{3}$， $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$	10	$\sqrt{2}$	$(0,1)$	$\dfrac{1}{32}$	②③

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	A	D	C	B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（两空题目，第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2(\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)$

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ ………………5 分

所以周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ………………6 分

（Ⅱ）因为 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$，

所以 $\dfrac{7\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{13\pi}{6}$. ………………7 分

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{13\pi}{6}$ 时，即 $x=\pi$ 时 $f(x)_{\max}=1$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$ 时,即 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 时 $f(x)_{\min}=-2$. …………13 分

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$m=4$，$n=2$，B； …………………… 3 分

（Ⅱ）$v_1<v_2$，$s_1^2<s_2^2$； …………………… 6 分

（Ⅲ）ξ 的可能取值为 0，30，140，170，

ξ	0	30	140	170
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ξ 的数学期望为 $E\xi=0\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}+140\times\frac{1}{3}+170\times\frac{1}{3}=\frac{325}{3}$．

…………………… 13 分

17．（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：依题意，$PA\perp$ 平面 $ABCD$．

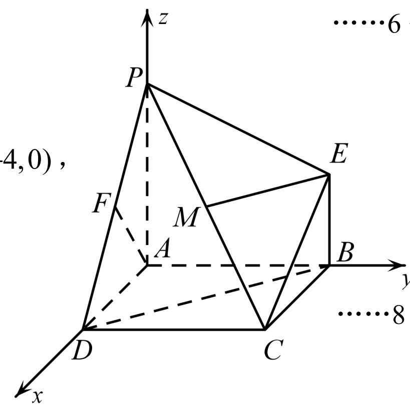
如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系． ……2 分

依题意，可得 $A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(4,4,0)$，$D(4,0,0)$，$P(0,0,4)$，$E(0,4,2)$，$F(2,0,2)$．

因为 $\overrightarrow{AF}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{PC}=(4,4,-4)$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{PC}=8+0+(-8)=0$． ……5 分

所以 $AF\perp PC$． ……6 分



（Ⅱ）证明：取 PC 的中点 M，连接 EM．

因为 $M(2,2,2)$，$\overrightarrow{EM}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(4,-4,0)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{EM}$，

所以 $BD//EM$． ……8 分

又因为 $EM\subset$ 平面 PEC，$BD\not\subset$ 平面 PEC，

所以 $BD//$ 平面 PEC． ……9 分

（Ⅲ）解：因为 $AF\perp PD$， $AF\perp PC$，

$PD\cap PC=P$，

所以 $AF\perp$ 平面 PCD，故 $\overrightarrow{AF}=(2,0,2)$ 为平面 PCD 的一个法向量. ……10 分

设平面 PCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{PC}=(4,4,-4)$， $\overrightarrow{PE}=(0,4,-2)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x+4y-4z=0,\\ 4y-2z=0,\end{cases}$

令 $y=-1$，得 $x=-1$， $z=-2$，故 $\vec{n}=(-1,-1,-2)$. ……12 分

所以 $\cos<\overrightarrow{AF},\vec{n}>=\dfrac{-2-0-4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……13 分

所以二面角 $D-PC-E$ 的大小为 $\dfrac{5\pi}{6}$. ……14 分

18.（本小题共 13 分）

（Ⅰ）解：设动点 E 的坐标为 (x,y)，

由抛物线定义知，动点 E 的轨迹是以 $(1,0)$ 为焦点， $x=-1$ 为准线的抛物线，

所以动点 E 的轨迹 C 的方程为 $y^2=4x$. ....5 分

（Ⅱ）证明：由 $\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=4x\end{cases}$，消去 x 得： $ky^2-4y+4b=0$.

因为直线 l 与抛物线相切，所以 $\Delta=16-16kb=0$，即 $b=\dfrac{1}{k}$. ......8 分

所以直线 l 的方程为 $y=kx+\dfrac{1}{k}$.

令 $x=-1$，得 $y=-k+\dfrac{1}{k}$.

所以 $Q\left(-1,-k+\dfrac{1}{k}\right)$. ....10 分

设切点坐标 $P(x_0,y_0)$，则 $ky_0^{\ 2}-4y_0+\frac{4}{k}=0$，

解得：$P(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k})$，……………11 分

设 $M(m,0)$，

$$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\frac{1}{\mathrm{k}^2}-m\right)(-1-m)+\frac{2}{k}(-k+\frac{1}{k})=m^2+m-2-\frac{m-1}{k^2}$$

所以当 $\begin{cases}m^2+m-2=0\\ m-1=0\end{cases}$，即 $m=1$时，$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MP}=0$

所以 $MQ\perp MP$

所以以 PQ 为直径的圆恒过 x 轴上定点 $M(1,0)$．……………13 分

19．（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x-2ax$，

由已知可得 $f'(1)=e-2a=b$，$f(1)=e-a=b+1$

解之得 $a=1,b=e-2$．…………3 分

（Ⅱ）令 $g(x)=f'(x)=e^x-2x$．

则 $g'(x)=e^x-2$，…………5 分

故当 $0\le x<\ln 2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $[0,\ln 2)$ 单调递减；

当 $\ln 2<x\le 1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(\ln 2,1]$ 单调递增；

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，…………8 分

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=e-1$．………11 分

（Ⅲ）当 $x\in R$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=bx+1$ 有两个交点．………14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）所有可能的数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,3,4,1$；$1,2,3,4,2$；$1,2,3,4,3$；

$1,2,3,4,4$ …………3 分

（Ⅱ）由题意知数列 $\{b_n\}$ 中 $b_{k+1} \ge b_k$.

又 $a_k + b_{m-k+1} = 2018$，所以 $a_{k+1} + b_{m-k} = 2018$ …………4 分

$a_{k+1} - a_k = (2018 - b_{m-k}) - (2018 - b_{m-k+1}) = b_{m-k+1} - b_{m-k} \ge 0$

所以 $a_{k+1} \ge a_k$，即 $a_k = b_k$（$k = 1,2,\cdots,m$） …………8 分

（Ⅲ）当 $m = 2$ 时，由 $b_1 + b_2 = b_1 b_2$ 得 $(b_1 - 1)(b_2 - 1) = 1$，又 $b_1, b_2 \in N^*$

所以 $b_1 = b_2 = 2$，不满足题意；

当 $m = 3$ 时，由题意知数列 $\{b_n\}$ 中 $b_{n+1} > b_n$，又 $b_1 + b_2 + b_3 = b_1 b_2 b_3$

当 $b_1 \ne 1$ 时此时 $b_3 > 3$，$b_1 + b_2 + b_3 < 3b_3$，而 $b_1 b_2 b_3 > 6b_3$，所以等式成立 $b_1 = 1$；

当 $b_2 \ne 2$ 时此时 $b_3 > 3$，$b_1 + b_2 + b_3 < 3b_3$，而 $b_1 b_2 b_3 \ge 3b_3$，所以等式成立 $b_2 = 2$；

当 $b_1 = 1$，$b_2 = 2$ 得 $b_3 = 3$，此时数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,3$.

当 $m \ge 4$ 时，$b_1 + b_2 + \cdots + b_m < mb_m$，而 $b_1 b_2 \cdots b_m \ge (m-1)! b_m > mb_m$，所以不存在满足题意的数列 $\{a_n\}$.

综上数列 $\{a_n\}$ 依次为 $1,2,3$. …………13 分

【注：若有其它解法，请酌情给分】