江淮十校2023届高三联考

数学试题

2023.5

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题. 每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=1-|x|\}$，则集合 $A\cap B$ 的元素个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{p}=\left(\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)$，则直线 l 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

3. 已知 a,b 为实数，则使得"$a>b>0$"成立的一个充分不必要条件为

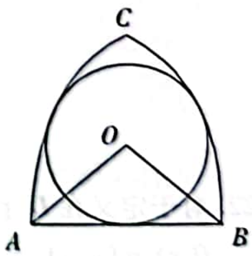
A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\ln(a+1)>\ln(b+1)$

C. $a^3>b^3$　　D. $\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$

4. "学如逆水行舟，不进则退；心似平原跑马，易放难收"（明·《增广贤文》）是勉励人们专心学习的. 如果每天的"进步"率都是1%，那么一年后是 $(1+1\%)^{365}=1.01^{365}$；如果每天的"退步"率都是1%，那么一年后是 $(1-1\%)^{365}=0.99^{365}$. 一年后"进步"的是"退步"的 $\frac{1.01^{365}}{0.99^{365}}=\left(\frac{1.01}{0.99}\right)^{365}\approx1481$ 倍. 如果每天的"进步"率和"退步"率都是20%，那么大约经过（　　）天后"进步"的是"退步"的一万倍. ($\lg 2\approx0.3010$, $\lg 3\approx0.4771$)

A. 20　　B. 21　　C. 22　　D. 23

5. 哥特式建筑是1140年左右产生于法国的欧洲建筑风格，它的特点是尖塔高耸、尖形拱门、大窗户及绘有故事的花窗玻璃，如图所示的几何图形，在哥特式建筑的尖形拱门与大窗户中较为常见，它是由线段 AB 和两个圆弧 AC、BC 围成，其中一个圆弧的圆心为 A，另一个圆弧的圆心为 B，圆 O 与线段 AB 及两个圆弧均相切，若 $AB=2$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$



A. $-\frac{7}{16}$　　B. $-\frac{2}{7}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{7}$

6. 将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x$ 的图像向左平移 $a(a>0)$ 个单位后的函数图像关于 y 轴对称，则实数 a 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 若$(mx-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中，所有项的系数和与二项式系数和相等，且第 6 项的二项式系数最大，则有序实数对(m,n)共有(　　)组不同的解

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知 O 为坐标原点，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，平行四边形 $OACB$ 的三个顶点 A,B,C 在椭圆 E 上，若直线AB 和 OC 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$，四边形 $OACB$ 的面积为$\frac{3\sqrt{6}}{2}$，则椭圆 E 的方程为

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.

9. 下列命题正确的有

A. 空间中两两相交的三条直线一定共面

B. 已知不重合的两个平面 α,β，则存在直线 $a\subset\alpha,b\subset\beta$，使得 a,b 为异面直线

C. 过平面 α 外一定点 P，有且只有一个平面 β 与 α 平行

D. 已知空间中有两个角 $\angle A_1B_1C_1$，$\angle A_2B_2C_2$，若直线 $A_1B_1\perp$ 直线 A_2B_2，直线 $B_1C_1\perp$ 直线 B_2C_2，则$\angle A_1B_1C_1=\angle A_2B_2C_2$ 或$\angle A_1B_1C_1+\angle A_2B_2C_2=\pi$

10. 学校北园食堂老麻抄手窗口又推出了酸辣粉、米粉等新品. 小明同学决定每隔 9 天去老麻抄手窗口消费一次，连续去了 5 次，他发现这 5 次的日期中没有星期天，则小明同学在这 5 次中第一次去北园食堂可能是

A. 星期一　　B. 星期三　　C. 星期五　　D. 星期六

11. 某项科学素养测试规则为：系统随机抽取 5 道测试题目，规定：要求答题者达到等级评定要求或答完 5 道题方能结束测试. 若答题者连续做对 4 道，则系统立即结束测试，并评定能力等级为 A；若连续做错 3 道题目，则系统自动终止测试，评定能力等级为 C；其它情形评定能力等级为 B. 已知小华同学做对每道题的概率均为$\frac{2}{3}$，且他每道题是否答对相互独立，则以下说法正确的是

A. 小华能力等级评定为 A 的概率为$\frac{64}{243}$

B. 小华能力等级评定为 B 的概率为$\frac{158}{243}$

C. 小华只做了 4 道题目的概率为$\frac{2}{9}$

D. 小华做完 5 道题目的概率为$\frac{16}{27}$

12. 已知函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}(ab\neq0)$，则下列说法正确的有

A. $\forall ab\neq0$，函数$f(x)$是奇函数

B. $\exists ab\neq0$，使得过原点 O 至少可以作$f(x)$的一条切线

C. $\forall ab\neq0$，方程$f(\sin x)=f(\sin x+2)$一定有实根

D. $\exists ab\neq0$，使得方程 $\sin[f(x)]=\cos[f(x)]$有实根

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 复数 z 满足 $|z-1+i|=1$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|$ 的最大值为________.

14. $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，前 n 项和为 S_n，若 $S_5=15$，a_3,a_6,a_{12} 成等比数列，则 $\frac{S_{2023}}{a_{2023}}=$________.

15. 函数 $f(x)=\cos 2x+2|\sin x|$ $(x\in[0,2\pi])$ 的值域为________.

16. 若函数 $f(x)=ax^3-\frac{1}{3}(a>0)$ 与函数 $g(x)=x^2-\frac{2}{3}cx$ 的图像恰有三个不同交点，且交点的横坐标构成等差数列，则实数 a 的取值范围是________.

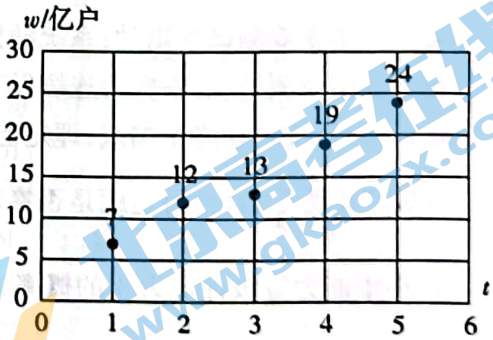
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知 $b\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+a\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=0$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 点 D 为边 BC 上一点（不包含端点），且满足 $\angle ADB=2\angle ACB$，求 $\frac{DC}{BC}$ 的取值范围.

18. 移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域. 截至2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿户，成为全球主要经济体中首个实现"物超人"的国家. 右图是 2018－2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份 2018－2022 对应的 t 分别为 1～5.



(1) 根据散点图推断两个变量是否线性相关. 计算样本相关系数（精确到 0.01），并推断它们的相关程度；

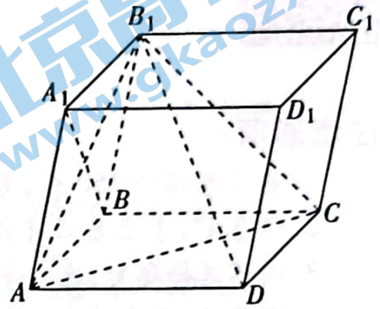
(2) 求 w 关于 t 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数.

附：样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i-\bar{w})^2}}$，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{w}-\hat{b}\cdot\bar{t}$，$\sqrt{1740}\approx 41.7$

19. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 都是边长为 2 的菱形，平面$ABCD\perp$平面ABB_1A_1，$A_1B\perp B_1D$.

(1)求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2)若 $\angle A_1AB=60°$，求二面角 $A-B_1C-B$ 的余弦值.



20. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $3a_n=2(S_n+2n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明：数列$\{a_n+2\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_3\dfrac{a_n+2}{2}$，证明：$\left(1+\dfrac{1}{b_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$.

21. 已知点 $F(0,1)$，动点 M 在直线 $l:y=-1$ 上，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与线段 MF 的垂直平分线交于点 P，记点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的标准方程；

(2)过 F 的直线与曲线 C 交于 A,B 两点，直线 OA,OB 与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的另一个交点分别为 D,E，求$\triangle DOE$与$\triangle AOB$ 面积之比的最大值.

22. 对于定义在 D 上的函数 $F(x)$，若存在 $x_0\in D$，使得 $F(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $F(x)$的一个不动点. 设函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x+x$，已知 $x_0(x_0\neq1)$为函数$f(x)$的不动点.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)若 $k\in\mathbf{Z}$，且 $kx_0<a$ 对任意满足条件的 x_0 成立，求整数 k 的最大值.

(参考数据：$\ln 2\approx0.693$，$\ln 3\approx1.1$，$e^{\frac{2}{3}}\approx1.95$，$e^2\approx7.39$，$e^{\frac{3}{2}}\approx4.48$)

江淮十校 2023 届高三联考

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题:本题共 8 小题. 每小题 5 分,共 40 分.

1-4 BADD　　5-8 ACDB

5. A　解析:设圆的半径为 r,则 $OA=2-r$,$\therefore (2-r)^2=r^2+1\Rightarrow r=\frac{3}{4}$,$\therefore OA=\frac{5}{4}$且 $\cos\angle AOB=-\frac{7}{25}$,

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(-\frac{7}{25}\right)=-\frac{7}{16}$.

6. C　解析:$f(x)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,将函数 $f(x)$ 图像向左平行移动 a 个单位后的函数记为 $g(x)$,则 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+a+\frac{\pi}{6}\right)$,而函数 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称有 $g(0)=\pm\sqrt{3}$,$\therefore \sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$,$\therefore a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore a=\frac{\pi}{3}+k\pi$,$\because a>0$,$\therefore$ 实数 a 的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

7. D　解析:由第 6 项的二项式系数最大知 n 的可能取值为 9,10,11,又由题得:$(m-1)^n=2^n$,当 $n=9,11$ 时,$m=3$;当 $n=10$ 时,$m=3$ 或 -1,故有序实数对(m,n)共有 4 组不同的解.

8. B　解析:设 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(a\cos\beta,b\sin\beta)$,则 $C(a\cos\alpha+a\cos\beta,b\sin\alpha+b\sin\beta)$,将 C 坐标代入椭圆方程有$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=1\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$,又四边形 $OACB$ 的面积为 $S=2S_{\triangle AOB}=|a\cos\alpha\cdot b\sin\beta-a\cos\beta\cdot b\sin\alpha|=ab|\sin(\alpha-\beta)|$,即$\frac{\sqrt{3}}{2}ab=\frac{3\sqrt{6}}{2}$,又根据 AB 和 OC 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$知$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a^2=6$,$b^2=3$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错得 0 分.

9. BC　　10. BD　　11. ABC　　12. AD

11. ABC　解析:$P_A=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{64}{243}$,$P_C=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{81}$.

$\therefore P_B=1-P_A-P_C=1-\frac{85}{243}=\frac{158}{243}$,$P_4=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$,$P_5=1-P_3-P_4=\frac{20}{27}$.

12. AD　解析:对 A:定义域对称,且 $f(x)=-f(-x)$,显然成立;

对 B:设直线 $y=kx$,联立方程:$ax+\frac{b}{x}=kx\Rightarrow(k-a)x^2-b=0$,显然不成立

对 C:若 $f(x_1)=f(x_2)$,$x_1\neq x_2$,则 $ax_1+\frac{b}{x_1}=ax_2+\frac{b}{x_2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{b}{a}$,

即 $\sin x(\sin x+2)=\frac{b}{a}$,由 $\sin x$ 的有界性,显然 $\sin x(\sin x+2)=\frac{b}{a}$不一定有解

对 D:$f(x)=k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in z$,显然存在 $\exists a,b$,使方程有解.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\sqrt{2}+1$　　14. 1012　　15. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$　　16. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

15. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

解析：令 $\sin x=t,t\in[-1,1]$，则 $f(x)$ 的值域转化为 $g(t)=1-2t^2+|2t|$ 的值域，

由于 $g(t)=\begin{cases}-2t^2+2t+1(0\leqslant t\leqslant 1)\\-2t^2-2t+1(-1\leqslant t<0)\end{cases}$ 得 $g(t)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

16. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

解析：函数 $f(x)=ax^3-\frac{1}{3}$ 与函数 $g(x)=x^2-\frac{2}{3}cx$ 的图像三个不同交点的横坐标等价于考查函数 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^3-x^2+\frac{2}{3}cx-\frac{1}{3}$ 有三个不同的零点，则 $h'(x)=3ax^2-2x+\frac{2}{3}c$，故必有方程 $3ax^2-2x+\frac{2}{3}c=0$ 有两个不同的实数根，则 $a>0,\Delta=4-8ac>0,\therefore ac<\frac{1}{2}$

另一方面，由三个不同交点的横坐标构成等差数列可知：令 $h''(x)=6ax-2=0$ 得 $x=\frac{1}{3a}$，则由三次函数的对称性知当且仅当 $h\left(\frac{1}{3a}\right)=0$ 时符合题意，化简整理即有 $6ac=2+9a^2$，故 $2+9a^2<3,\therefore a^2<\frac{1}{9}$ 且 $a>0$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由 $b\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+a\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=0$，结合正弦定理可得：

$\sin B\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)-\sin A\sin B=0\Rightarrow\sin B=0$（舍）或 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\frac{1}{2}\sin A$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由 $\angle ADB=2\angle ACB$ 知 $AD=CD$ 且 $C\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$， ………………………………… 6 分

所以 $\triangle ABD$ 中，有 $B=\frac{2\pi}{3}-C,\angle BAD=\frac{\pi}{3}-C$，

由正弦定理可得：$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)}=\frac{CD}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}$ ………………………… 8 分

所以 $\frac{CD}{CB}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sqrt{3}\cos C}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ……………… 10 分

18. 解：(1) 由图，两个变量线性相关.

由已知条件可得：$\bar{t}=3,\bar{w}=15$，所以 $\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})=16+3+0+4+18=41$， ………… 2 分

$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(w_i-\bar{w})^2}=\sqrt{64+9+4+16+81}=\sqrt{174}$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\sqrt{4+1+0+1+4}=\sqrt{10}$，

所以相关系数 $r=\frac{41}{\sqrt{1740}}\approx\frac{41}{41.7}\approx 0.98$，因此，两个变量具有很强的线性相关性. ………… 6 分

(2)结合(1)可知，$\hat{b}=\frac{41}{10}=4.1$，$\hat{a}=\overline{w}-\hat{b}\cdot\overline{t}=15-4.1\times3=2.7$， …………………………………… 9 分

所以回归方程是：$\hat{w}=4.1t+2.7$， …………………………………………………………………… 10 分

当 $t=7$ 时，有 $\hat{w}=4.1\times7+2.7=31.4$，即预测 2024 年移动物联网连接数为 31.4 亿户． ………… 12 分

19. 证明：(1)连接 B_1A，作 $A_1H\perp AB$ 于 H.

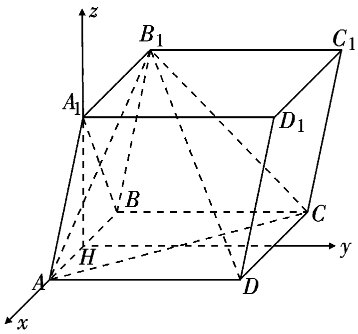
因为 ABB_1A_1 是菱形，所以 $B_1A\perp A_1B$，

又因为 $A_1B\perp B_1D$，所以 $A_1B\perp$ 面 DAB_1，所以 $A_1B\perp AD$，

又平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，所以 $A_1H\perp$ 面 $ABCD\Rightarrow A_1H\perp AD$

所以 $AD\perp$ 面 $ABB_1A_1\Rightarrow AD\perp AB$，而 $ABCD$ 为菱形，所以四边形 $ABCD$ 是正方形. …………………… 5 分

(2)解：$\angle A_1AB=60°$ 时，H 为 AB 的中点，如图建立空间直角坐标系



则，$A(1,0,0)$，$B_1(-2,0,\sqrt{3})$，$C(-1,2,0)$，$B(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(-1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(0,-2,0)$

设平面 AB_1C 的一个法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，令 $x=1$，

解得 $\vec{m}=(1,1,\sqrt{3})$， ………………………………………………………… 7 分

设平面 BB_1C 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，令 $z=1$，解得 $\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$， …………… 9 分

则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$， ……………………………………………………………… 11 分

又因为 $A-B_1C-B$ 为锐二面角，所以 $A-B_1C-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………… 12 分

20. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $n\geqslant2$，$3a_n=2(S_n+2n)$，$3a_{n-1}=2(S_{n-1}+2n-2)$.

相减得：$a_n=3a_{n-1}+4$，所以 $a_n+2=3(a_{n-1}+2)$，又 $a_1=4$， ……………………………………… 2 分

所以 $\{a_n+2\}$ 是以首项为 6，公比为 3 的等比数列，即 $a_n+2=6\cdot3^{n-1}$，所以 $a_n=6\cdot3^{n-1}-2$ …………… 5 分

(2)$b_n=n$，即证：$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$ …………………………………… 7 分

方法一：令 $f(n)=\frac{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\left(1+\frac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{2n-1}}\right)}{\sqrt{2n+1}}$. 则 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{2n+2}{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3}}$， ……… 9 分

因为 $(2n+2)^2>(2n+1)(2n+3)$，所以 $f(n+1)>f(n)$ …………………………………………………… 11 分

所以 $f(n)$ 单调递增，即 $f(n)>f(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$，即：$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\left(1+\frac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

方法二：放缩法：$\frac{2n}{2n-1}>\frac{2n+1}{2n}\Rightarrow(\frac{2n}{2n-1})^2>\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n}=\frac{2n+1}{2n-1}$ ………………………… 8 分

所以：$\left(\frac{2}{1}\right)^2>\frac{3}{1},\left(\frac{4}{3}\right)^2>\frac{5}{3},\cdots,\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2>\frac{2n+1}{2n-1}$ ………………………… 10 分

相乘得：$\left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2>\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\frac{2n+1}{2n-1}=2n+1$

即：$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\left(1+\frac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$. ………………………… 12 分

方法三：数学归纳法：步骤略

21. 解：(1) 曲线 C 的方程为：$x^2=4y$ ………………………… 4 分

(2) 设 A,B 坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_3,y_3),E(x_4,y_4)$,

因为 $\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{|OD|\cdot|OE|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}$ ………………………… 6 分

令直线 $l_{OA}:y=k_1x,k_1=\frac{y_1}{x_1},l_{OB}:y=k_2x,k_2=\frac{y_2}{x_2}$，与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 联立得：$x_3=\frac{2k_1}{1+k_1^2}$,

同理：$x_4=\frac{2k_2}{1+k_2^2}$，所以 $\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{4k_1k_2}{x_1x_2(1+k_1^2)(1+k_2^2)}\right|$ ………………………… 8 分

令 $l_{AB}:y=kx+1$，与 $x^2=4y$ 联立得：$x^2-4kx-4=0$，所以：$x_1x_2=-4,y_1y_2=1$

所以 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$，代入得：$\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{1}{\frac{17}{4}+4(k_1^2+k_2^2)}\right|$, ………………………… 10 分

又因为 $k_1^2+k_2^2\geqslant2|k_1k_2|$，所以 $\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{1}{\frac{17}{4}+4(k_1^2+k_2^2)}\right|\leqslant\frac{4}{25}$，当且仅当 $k_1=\frac{1}{2},k_2=-\frac{1}{2}$ 时取等

所以 $\triangle DOE$ 与 $\triangle AOB$ 面积之比的最大值 $\frac{4}{25}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1) $(x-1)e^x-a\ln x=0$ 在定义域内有 $x_0\neq1$ 的零点，所以 $a=\frac{(x-1)e^x}{\ln x}$

令 $g(x)=\frac{(x-1)e^x}{\ln x}\Rightarrow g'(x)=\frac{xe^x\left(\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln^2x}$，令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{x^3},x>0,x\neq1$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，$h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$(1,+\infty)$ 递增
………………………… 3 分

由洛必达法则得：$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)e^x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{xe^x}{\frac{1}{x}}\right)=e,\lim\limits_{x\to0}g(x)=0,x\to+\infty,g(x)\to+\infty$ ………… 4 分

所以：$a\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ ………………………… 5 分

(2) 由题可知：$(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=0$，可得：$a=\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$，即 $kx_0<\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$

因为 $x_0\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，取 $x_0=\frac{1}{2}$，易得：$k<\frac{\sqrt{e}}{\ln 2}\approx2.38$，所以 k 取 2 ………………………… 6 分

下证：$2x_0<\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$ 对任意 $x_0\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 成立

易证：$\ln x \leqslant x-1$ 对 $x>0$ 恒成立，当 $x_0 \in (1,+\infty)$ 时，$\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0} > e^{x_0}$

易证：$e^{x_0} \geqslant ex_0$，所以 $e^{x_0} \geqslant ex_0 > 2x_0$，成立 ………………………………………………………… 8 分

当 $x_0 \in (0,1)$ 时，只需证：$2\ln x_0 > \dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}$ 成立

方法一：令 $H(x)=(x-1)e^x-2x\ln x, 0<x<1$，只需证 $H(x)<0$

$H'(x)=xe^x-2\ln x-2, H''(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}$，显然 $H''(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}$ 递增

$H''\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{e}}{2}-4<0, H''\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{3}\left(e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{9}{5}\right)>0$，所以存在 $x_1 \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$，使 $H''(x_1)=0$

且 $H'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递减，在 $(x_1,1)$ 递增，

$\begin{cases} H(x) \geqslant H'(x_1)=x_1e^{x_1}-2\ln x_1-2 \\ x_1(x_1+1)e^{x_1}=2 \end{cases}$ 整理得 $H'(x_1)=x_1e^{x_1}-2\ln x_1-2=\dfrac{2}{x_1+1}-2\ln x_1-2$ ………… 10 分

因为函数 $y=\dfrac{2}{x+1}-2\ln x-2$ 在 $x \in (0,1)$ 递减，

所以 $H'(x_1)=\dfrac{2}{x_1+1}-2\ln x_1-2>H'\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\ln 3-2\ln 2-\dfrac{4}{5}>0$

所以 $H'(x)>0$ 在 $x \in (0,1)$ 恒成立，即 $H(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 递增

显然 $H(x)<H\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{-e^{\frac{2}{3}}+4\ln\dfrac{3}{2}}{3}=\dfrac{-0.312}{3}<0$，所以成立 ………………………………… 12 分

方法二：令 $G(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x}-2\ln x, 0<x<1$，只需证 $G(x)<0$

$G'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)e^x-2x}{x^2}$，令 $\mu(x)=(x^2-x+1)e^x-2x$，则 $\mu'(x)=(x^2+x)e^x-2$ ………………… 9 分

显然 $\mu'(x)=(x^2+x)e^x-2$ 递增，且 $\mu'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\sqrt{e}-2<0$，$\mu'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{10}{9}e^{\frac{2}{3}}-2>0$

所以存在 $x_2 \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$，使 $\mu'(x_2)=0$，且 $\mu(x)$ 在 $(0,x_2)$ 递减，在 $(x_2,1)$ 递增， ………………… 10 分

$\begin{cases} \mu(x) \geqslant \mu(x_2)=(x_2^2-x_2+1)e^{x_2}-2x_2 \\ (x_2^2+x_2)e^{x_2}=2 \end{cases}$ 整理得 $\mu(x_2)=\dfrac{(x_2^2-x_2+1)2}{x_2^2+x_2}-2x_2=\dfrac{2-2x_2-2x_2^3}{x_2^2+x_2}$ ………… 11 分

显然 $2-2x_2-2x_2^3$ 在 $x_2 \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$ 递减，所以 $0<2\left(1-\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{27}\right)<2-2x_2-2x_2^3<2\left(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\right)$

所以 $\mu(x) \geqslant \mu(x_2)>0$，即 $G'(x)>0$ 对 $x \in (0,1)$ 恒成立，所以 $G(x)<G(1)=0$，成立 ………… 12 分

方法三：因为 $e^x \geqslant x+1$ 对任意 $x>0$ 恒成立，$\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}<\dfrac{(x_0-1)(x_0+1)}{x_0}=x_0-\dfrac{1}{x_0}$ ………………… 9 分

令 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x, g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}>0$

所以 $g(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 递增，所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $x_0-\dfrac{1}{x_0}<\ln x_0$， ………………………………… 11 分

所以 $\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}<\dfrac{(x_0-1)(x_0+1)}{x_0}=x_0-\dfrac{1}{x_0}$ 成立，即 $H(x)<0$. ………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。