成都市 2019 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. D; 3. A; 4. A; 5. B; 6. C; 7. C; 8. B; 9. A; 10. B; 11. D; 12. C.

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 3; 14. 4; 15. 14; 16. $\sqrt{3}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)调查的 50 名学生某阶段每人每天课外阅读平均时长的频率分布表如下:

平均时长(单位:分钟)	(0,20]	(20,40]	(40,60]	(60,80]
频率	0.18	0.42	0.3	0.1

……2 分

∴该阶段这 50 名学生每天课外阅读平均时长的平均数的估计值为

$10\times0.18+30\times0.42+50\times0.3+70\times0.1=36.4$. ……5 分

(Ⅱ)由题意可知课外阅读平均时长在区间(60,80]的学生有 5 名,其中语文成绩优秀的学生有 3 名,记为 A_1,A_2,A_3,其余的记为 a_1,a_2.

从上述 5 名学生中随机抽取 3 名的所有结果为:(A_1,A_2,A_3),(A_1,A_2,a_1),(A_1,A_2,a_2),(A_1,A_3,a_1),(A_1,A_3,a_2),(A_1,a_1,a_2),(A_2,A_3,a_1),(A_2,A_3,a_2),(A_2,a_1,a_2),(A_3,a_1,a_2)共 10 种. ……8 分

其中至少有 2 名语文成绩优秀的学生结果为:(A_1,A_2,A_3),(A_1,A_2,a_1),(A_1,A_2,a_2),(A_1,A_3,a_1),(A_1,A_3,a_2),(A_2,A_3,a_1),(A_2,A_3,a_2)共 7 种. ……11 分

∴所选 3 名学生中至少有 2 名语文成绩优秀的学生的概率 $P=\frac{7}{10}$. ……12 分

18. 解:(Ⅰ)由题意得 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1-\cos2\omega x}{2}=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. ……2 分

$\because f(\frac{\pi}{12})=\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$\therefore \sin(\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=0$.

$\therefore \frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$. ……3 分

$\therefore \omega=6k+1$.

又 $0<\omega<6$,$\therefore k=0,\omega=1$.

$\therefore f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. ……4 分

由题意得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

即 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. ……6 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$. ……7 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)有 $f(\theta)=\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$,得 $\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$. ……8 分

$\because\theta\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6})$, $\therefore 2\theta-\frac{\pi}{6}\in(0,\frac{\pi}{6})$.

$\therefore\cos(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……9 分

$\therefore\sin2\theta=\sin[(2\theta-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(2\theta-\frac{\pi}{6})$ ……11 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$. ……12 分

19. **解**:(Ⅰ)在矩形 BCC_1B_1 中,$\because BC=2,BB_1=3,BF=2,D$ 为 BC 的中点,

可得 $C_1F=DF=\sqrt{5}$, $C_1D=\sqrt{10}$.

$\because C_1F^2+DF^2=C_1D^2$, $\therefore C_1F\perp DF$. ……1 分

$\because AB=AC,D$ 为 BC 的中点,$\therefore AD\perp BC$.

由题意有 $BB_1\perp$ 平面 ABC. 又 $BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1, $\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1.

$\because$ 平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$, $AD\subset$ 平面 ABC,

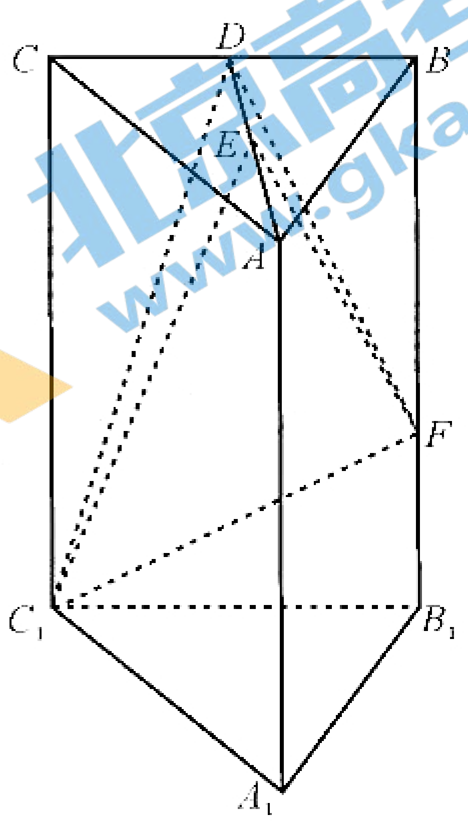
$\therefore AD\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……3 分

$\because C_1F\subset$ 平面 BCC_1B_1, $\therefore C_1F\perp AD$. ……4 分

又 $AD\cap DF=D$, $AD,DF\subset$ 平面 DEF,

$\therefore C_1F\perp$ 平面 DEF. ……5 分

又 $\because EF\subset$ 平面 DEF, $\therefore C_1F\perp EF$. ……6 分



(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

$\therefore V_{C_1-DEF}=V_{E-C_1DF}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1DF}\cdot DE=\frac{5}{3}$. ……8 分

$\therefore\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\cdot DE=\frac{5}{3}$,解得 $DE=2$. ……10 分

又 $DE\perp DF$, $\therefore EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\sqrt{4+5}=3$. ……11 分

$\therefore\sin\angle EFD=\frac{DE}{EF}=\frac{2}{3}$. ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)由已知得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ……1 分

将点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$代入椭圆 C 的方程，得$\frac{3}{4}+\frac{1}{4b^2}=1$. 解得 $b=1$. ……3 分

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4 分

（Ⅱ）由题意知直线 PQ 的斜率存在. 设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去 y，得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$. ……5 分

$\therefore\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)>0$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$. ……6 分

$\therefore y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$$=\frac{k^2(4m^2-4)}{4k^2+1}-\frac{8k^2m^2}{4k^2+1}+m^2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}.$$

$$\therefore k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}}{\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+\frac{16km}{4k^2+1}+4}=\frac{1}{20}.$$

……7 分

化简得$\frac{m^2-4k^2}{4m^2+16km+16k^2}=\frac{1}{20}$，即 $m^2-km-6k^2=0$.

$\therefore(m+2k)(m-3k)=0$. ……8 分

$\because$直线 PQ 不能经过点 A，$\therefore m+2k\neq0$，$\therefore m-3k=0$.

$\therefore$直线 PQ 的方程为 $y=k(x+3)$.

$\therefore$直线 PQ 经过定点$(-3,0)$，设此定点为 D. ……9 分

$$\therefore S_{\triangle APQ}=|S_{\triangle APD}-S_{\triangle AQD}|=\frac{1}{2}|AD||y_1-y_2|=\frac{5}{2}|y_1-y_2|=\frac{5|k|}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{5|k|}{2}\cdot\frac{4\sqrt{4k^2-m^2+1}}{4k^2+1}=\frac{10\sqrt{k^2(1-5k^2)}}{4k^2+1}.$$ ……10 分

由 $\Delta=16(4k^2-m^2+1)=16(1-5k^2)>0$，得 $0<k^2<\frac{1}{5}$.

令 $t=4k^2+1$，则 $t\in(1,\frac{9}{5})$.

$$\therefore S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{-5t^2+14t-9}{t^2}}=\frac{5}{2}\sqrt{-9(\frac{1}{t}-\frac{7}{9})^2+\frac{4}{9}}.$$ ……11 分

$\therefore$当$\frac{1}{t}=\frac{7}{9}$，即 $k^2=\frac{1}{14}$时，$\triangle APQ$ 面积取得最大值$\frac{5}{3}$. ……12 分

21. 解：（Ⅰ）由题意知 $f'(x)=e^x-ax\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

即 $a\leqslant\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ……2 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{最小值}=g(1)=e$. ……4 分

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,e]$. ……5 分

(Ⅱ) $\because f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，$\therefore f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

$\therefore e^{x_1}=ax_1$，$e^{x_2}=ax_2$.

由(Ⅰ)得 $0<x_1<1<x_2$，$a\in(e,+\infty)$.

$\therefore e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$. ……6 分

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $t\in(1,+\infty)$.

$\therefore e^{tx_1-x_1}=t$，$\therefore tx_1-x_1=\ln t$.

$\therefore x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$\therefore x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$. ……8 分

令 $h(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，则 $h'(t)=\frac{t-2\ln t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$.

令 $\varphi(t)=t-2\ln t-\frac{1}{t}$. 则 $\varphi'(t)=1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$.

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1)=0$，$\therefore \varphi(t)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

$\therefore h'(t)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……10 分

又 $h(2)=3\ln 2$，$h(e)=\frac{e+1}{e-1}$， ……11 分

$\therefore$ 当 $h(t)\in[3\ln 2,\frac{e+1}{e-1}]$ 时，$t\in[2,e]$.

$\therefore \frac{x_2}{x_1}$ 的取值范围为 $[2,e]$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ) 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，此时直线 l 的普通方程为 $x=0$； ……1 分

当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，此时直线 l 的普通方程为 $y=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x=\tan\alpha\cdot x$. ……2 分

又曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y+3=0$，

由极坐标与直角坐标的互化关系 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$,

即 $\rho^2-4\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+3=0$. ……4 分

(Ⅱ)$\because$ 直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,$\therefore \alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$. ……5 分

将直线 l 的极坐标方程代入曲线 C 的极坐标方程,得 $\rho^2-4\rho\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+3=0$.

设该方程的两根分别为 ρ_1 和 ρ_2.

则 $\rho_1+\rho_2=4\sin(\alpha+\frac{\pi}{6}), \rho_1\rho_2=3$. ……6 分

由题意知 $|OA|=\rho_1, |OB|=\rho_2$.

$\therefore \frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{4}{3}\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$. ……8 分

$\because \alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$, $\therefore \alpha+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$.

$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$. ……9 分

$\therefore \frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$ 的取值范围为 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3}]$. ……10 分

23. **解:**(Ⅰ)当 $a=1$ 时,$f(x)=\sqrt{4x^2+4x+1}-|2x-3|=|2x+1|-|2x-3|$.

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=-2x-1+2x-3=-4$; ……1 分

当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$f(x)=2x+1+2x-3=4x-2\in[-4,4]$; ……2 分

当 $x>\frac{3}{2}$ 时,$f(x)=2x+1-2x+3=4$. ……3 分

综上,函数 $f(x)$ 的最大值为 4. ……4 分

(Ⅱ)由题意,有 $f(x)_{最大值}<(\frac{1}{m}+\frac{1}{n+2})_{最小值}$. ……5 分

$\because f(x)=\sqrt{4x^2+4ax+a^2}-|2x-3a|=|2x+a|-|2x-3a|\leqslant|(2x+a)-(2x-3a)|$
$=4|a|$,

$\therefore f(x)_{最大值}=4|a|$. ……7 分

又 $m,n\in(0,+\infty), m+n=6$,

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{8}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n+2})[m+(n+2)]\geqslant\frac{1}{8}(1+1)^2=\frac{1}{2}$.

$\therefore (\frac{1}{m}+\frac{1}{n+2})_{最小值}=\frac{1}{2}$. 此时 $\begin{cases}m=n+2,\\ m+n=6\end{cases}$ 即 $m=4,n=2$. ……9 分

$\therefore 4|a|<\frac{1}{2}$,即 $|a|<\frac{1}{8}$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\frac{1}{8},\frac{1}{8})$. ……10 分