中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 3 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\left|x^2-4x+3<0\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2-1}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$[2,3)$　　B．$(1,3)$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$(3,+\infty)$

2．设 z 是纯虚数，若 $\frac{3+z}{1+\mathrm{i}}$ 是实数，则 z 的虚部为

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

3．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\pi\right)$，则"函数 $f(x)$ 是偶函数"是"$\varphi=-\frac{\pi}{3}$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若圆 $(x-a)^2+(y-3)^2=20$ 上有四个点到直线 $2x-y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{5}$，则实数 a 的取值范围是

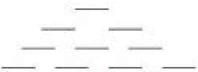
A．$\left(-\infty,-\frac{13}{2}\right)\cup\left(\frac{17}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\frac{13}{2},\frac{17}{2}\right)$

C．$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

5．若 $7^n+C_{n+1}^1 7^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}7+C_{n+1}^n$ 是 9 的倍数，则自然数 n 为

A．4 的倍数　　B．3 的倍数　　C．奇数　　D．偶数

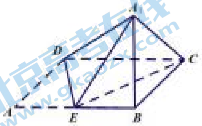
6．现将 0-9 十个数字填入右方的金字塔中，要求每个数字都使用一次，第一行的数字中最大的数字为 a，第二行的数字中最大的数字为 b，第三行的数字中最大的数字为 c，第四行的数字中最大的数字为 d，则满足 $a<b<c<d$ 的填法的概率为



（第 6 题图）

A．$\frac{1}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{2}{15}$　　D．$\frac{2}{5}$

7．在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2AD=4$，E 是 AB 的中点，将 ΔADE 沿直线 DE 翻折成 ΔA_1DE，连接 A_1C．当二面角 A_1-DE-C 的平面角的大小为 $60°$ 时，则三棱锥 A_1-CDE 外接球的表面积为



（第 7 题图）

A．$\frac{56\pi}{3}$　　B．18π

C．19π　　D．$\frac{53\pi}{3}$

8．已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若集合 $A=\{x|2x^2<\log_a x\}$，$B=\left\{x\middle|y=\ln x+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是

A．$\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{4e}}\right]$　　B．$\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[e^{\frac{1}{4e}},+\infty\right)$

C．$\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{2e}}\right]$　　D．$\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\left[e^{\frac{1}{2e}},+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．设 $a>0,b>0$，满足 $3a+2b=1$，下列说法正确的是

A．ab 的最大值为 $\frac{1}{24}$　　B．$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $8\sqrt{3}$

C．a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{13}$　　D．$9a^2+4b^2$ 的最小值为 1

10．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_1+a_2+a_3=21$，$S_5=25$，下列说法正确的是

A．$a_n=2n+3$　　B．$S_n=-n^2+10n$

C．$\{S_n\}$ 的最大值为 S_5　　D．$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 10 项和为 $-\frac{10}{99}$

11．已知 ΔABC 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c，已知 $b=4,c=6$，ΔABC 的面积 S 满足 $(b+c)^2=\left(4\sqrt{3}+8\right)S+a^2$，点 O 为 ΔABC 的外心，满足 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则下列结论正确的是

A. $S=6$　　B. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO}=10$　　C. $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\frac{2\sqrt{21}}{3}$　　D. $\lambda=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12．已知 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{4}=1$ 上两个不同点，且满足 $x_1x_2+9y_1y_2=-2$，则下列说法正确的是

A．$|2x_1+3y_1-3|+|2x_2+3y_2-3|$ 的最大值为 $6+2\sqrt{5}$

B．$|2x_1+3y_1-3|+|2x_2+3y_2-3|$ 的最小值为 $3-\sqrt{5}$

C．$|x_1-3y_1+5|+|x_2-3y_2+5|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{10}}{5}$

D．$|x_1-3y_1+5|+|x_2-3y_2+5|$ 的最小值为 $10-2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知点 M 为抛物线 $y^2=8x$ 上的动点，点 N 为圆 $x^2+(y-4)^2=5$ 上的动点，则点 M 到 y 轴的距离与点 M 到点 N 的距离之和最小值为________．

14．已知 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，函数 $h(x)=x^2f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则不等式 $(1-x)^2f(1-x)-(3+x)^2f(3+x)>0$ 的解集为________．

15．用 0,1,2,3,4,5 这六个数字组成无重复数字的六位数，要求任意两个偶数数字之间至少有一个奇数数字，则符合要求的六位数的个数有________个．

16．若关于 x 的不等式 $e^x(2k-x)<x+3$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则整数 k 的最大值为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{4}{9}$，$(3n+9)\cdot(n+1)^2a_{n+1}=(n+2)^2a_n$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

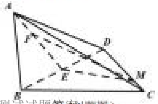
（2）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot3^n}$．

18．（12 分）已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2b\cos A-a=2c$．

（1）求角 B；

（2）设 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 交 AC 于点 D，若 $BD=2$，求 ΔABC 的面积的最小值．

19．（12 分）如图所示，在三棱锥 $A-BCD$ 中，满足 $BC=CD=3\sqrt{3}$，点 M 在 CD 上，且 $DM=5MC$，ΔABD 为边长为 6 的等边三角形，E 为 BD 的中点，F 为 AE 的三等分点，且 $2AF=FE$．



（1）求证：FM∥面 ABC；　　（第19题图）

（2）若二面角 $A-BD-C$ 的平面角的大小为 $\frac{2\pi}{3}$，求直线 EM 与面 ABD 所成角的正弦值.

0. （12 分）为提高学生的数学应用能力和创造力，学校打算开设“数学建模”选修课，为了解学生对“数学建模”的兴趣度是否与性别有关，学校随机抽取该校 30 名高中学生进行问卷调查，其中认为感兴趣的人数占 70%.

（1）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表判断是否有 85%的把握认为学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别有关？

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12		
女生		5	
合计			30

（2）若感兴趣的女生中恰有 4 名是高三学生，现从感兴趣的女生中随机选出 3 名进行二次访谈，记选出高三女生的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

1. （12 分）已知双曲线 C 以 $2x\pm\sqrt{5}y=0$ 为渐近线，其上焦点 F 坐标为 $(0,3)$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）不平行于坐标轴的直线 l 过 F 与双曲线 C 交于 P,Q 两点，PQ 的中垂线交 y 轴于点 T，问 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 是否为定值，若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

2. （12 分）设 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}(x\in\mathbf{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调性，并求 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的切线方程；

（2）若 $(ex)\cdot f(x)\leq k\cdot(\ln x+1)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，求 k 的取值范围.

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 3 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	D	C	C	A	B

二、多项选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 **5** 分，部分选对但不全的得 **2** 分，有错选的得 **0** 分．

9	10	11	12
AC	BCD	ABD	AD

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．$\sqrt{5}-2$　　　　14．$(-\infty,-1)$

15．108　　　　16．1

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because (3n+9)\cdot(n+1)^2 a_{n+1}=(n+2)^3 a_n$

$\therefore \dfrac{3(n+3)a_{n+1}}{(n+2)^2}=\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}$

即 $\dfrac{(n+3)a_{n+1}}{(n+2)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}$ ……………………………………2 分

又 $\dfrac{(1+2)a_1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{3}$，所以数列 $\left\{\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{3}$，公比为 $\dfrac{1}{3}$ 的等比数列

从而 $\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，则 $a_n=\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot 3^n}$ ……………………………………5 分

（2）$\because a_n=\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot 3^n}=\dfrac{n+1}{n+2}\cdot\dfrac{n+1}{3^n}<\dfrac{n+1}{3^n}$ ……………………………………6 分

$\therefore S_n<\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^n}$

设 $T_n=\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^n}$，则 $\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^{n+1}}$

两式相减得：

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{2\cdot 3^{n+1}}$$ ……9 分

从而 $T_n=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot 3^n}$，故 $S_n<\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot 3^n}$ ……10 分

18.（12 分）

（1）由已知及正弦定理得：$2\sin B\cdot\cos A-\sin A=2\sin C$

又在 ΔABC 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ……2 分

$\therefore 2\sin B\cos A-\sin A=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

即 $2\sin A\cos B=-\sin A$

又 $\sin A\neq 0$，$\therefore \cos B=-\frac{1}{2}$ ……4 分

又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$，即角 B 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ……5 分

（2）$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$ ……6 分

BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，而 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{1}{2}\times AB\times BD\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times BD\times BC\times\sin 60^\circ$

即 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot BD\cdot(a+c)$，$\therefore BD=\frac{ac}{a+c}$ ……8 分

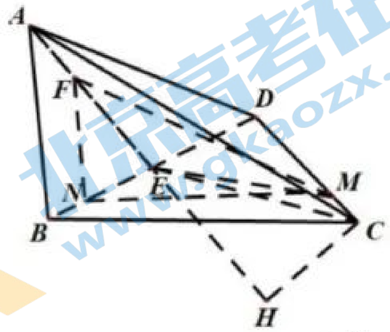
$\because BD=2$，$\therefore ac=2(a+c)$

$\because a+c\geq 2\sqrt{ac}$，$\therefore ac\geq 4\sqrt{ac}$，即 $ac\geq 16$ ……10 分

当且仅当 $a=c=4$ 时取等号，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B\geq\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$

即 ΔABC 的面积的最小值为 $4\sqrt{3}$ ……12 分

19.（12 分）



（1）在 BE 上取一点 N，使得 $BN=\frac{1}{2}NE$，连接 FN，NM

$\because BD=6$，$\therefore BN=\frac{1}{6}BD=1$，$NE=2$，$ED=3$

$\because \frac{AF}{FE}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{BN}{NE}=\frac{AF}{FE}=\frac{1}{2}$

则 $FN\,//\,AB$ ……………………………………………………………………2 分

$\because FN\not\subset$ 面 ABC，$AB\subset$ 面 ABC，$\therefore FN\,//$ 面 ABC

$\because \frac{BN}{ND}=\frac{CM}{MD}=\frac{1}{5}$，$\therefore NM\,//\,BC$ ……………………………………………4 分

$\because NM\not\subset$ 面 ABC，$BC\subset$ 面 ABC，$\therefore NM\,//$ 面 ABC

$\because FN\cap NM=N$，$\therefore$ 面 $FNM\,//$ 面 ABC

$\because FM\subset$ 面 FNM，$\therefore FM\,//$ 面 ABC ……………………………………5 分

（2）$\because AE\perp BD$，$CE\perp BD$

所以二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AEC=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………6 分

又 $\because AE\cap CE=E$，$\therefore BD\perp$ 面 AEC

$\because BD\subset$ 面 ABD，$\therefore$ 面 $ABD\perp$ 面 AEC

$\because$ 面 $ABD\cap$ 面 $AEC=AE$，过点 C 作 $CH\perp AE$，则 $CH\perp$ 面 ABD

则 $CH=CE\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}CE$

$\because CE=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-3^2}=3\sqrt{2}$，$\therefore CH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ……………………8 分

即 C 到面 ABD 的距离为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\because MD=\frac{5}{6}CD$，$\therefore M$ 到面 ABD 的距离为 $\frac{5}{6}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$ ……………………9 分

计算 EM：$\cos\angle CDB=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

在 ΔDME 中，$DM=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$DE=3$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+3^2-EM^2}{2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 3}\Rightarrow EM=\frac{\sqrt{51}}{2}$$ ……………………………………11 分

$\therefore$ EM 与面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\frac{5\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{51}}{2}}=\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$ ……………………………………12 分

（其他方法酌情给分）

20.（12 分）

（1）列联表如下：

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12	4	16
女生	9	5	14
合计	21	9	30

……………………………………2 分

$$K^2=\frac{30\times(12\times5-4\times9)^2}{16\times14\times21\times9}\approx 0.4082<2.072$$

所以没有 85%的把握认为学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别有关 ……………5 分

（2）由题意可知 X 的取值可能为 0，1，2，3

则 $P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{42}$ ……………………………………6 分

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\dfrac{10}{21}$ ……………………………………7 分

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}$ ……………………………………8 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{1}{21}$ ……………………………………9 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$$ ……………………………………12 分

21.（12 分）

（1）因为双曲线 C 以 $2x\pm\sqrt{5}y=0$ 为渐近线

设双曲线方程为 $(2x+\sqrt{5}y)(2x-\sqrt{5}y)=\lambda$，即 $4x^2-5y^2=\lambda$ ……………………1 分

$\because F(0,3)$，$\therefore \lambda<0$，即：$\dfrac{y^2}{-\frac{\lambda}{5}}-\dfrac{x^2}{-\frac{\lambda}{4}}=1$

$\therefore -\dfrac{\lambda}{5}-\dfrac{\lambda}{4}=9$，$\therefore -\dfrac{9\lambda}{20}=9$，即 $\lambda=-20$ ……………………………………3 分

所以双曲线 C 的方程为：$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{5}=1$ ……………………………………4 分

（2）设直线 $l:y=kx+3$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}5y^2-4x^2=20\\ y=kx+3\end{cases}\Rightarrow 5(kx+3)^2-4x^2=20$$

化简得：$(5k^2-4)x^2+30kx+25=0$ ……………………………………6 分

此方程的两根为 x_1,x_2，则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{30k}{5k^2-4}\\ x_1x_2=\dfrac{25}{5k^2-4}\end{cases}$

$$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{900k^2}{(5k^2-4)^2}-\frac{100}{5k^2-4}}=10\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{9k^2-(5k^2-4)}{(5k^2-4)^2}}$$

$$=10\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{4k^2+4}{(5k^2-4)^2}}=\frac{20(k^2+1)}{|5k^2-4|}$$ ……………………………………8 分

PQ 中点 M 坐标为 $\left(\dfrac{-15k}{5k^2-4},\dfrac{-12}{5k^2-4}\right)$ ……………………………………9 分

$\therefore PQ$ 中垂线方程为：$y+\dfrac{12}{5k^2-4}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{15k}{5k^2-4}\right)$

令 $x=0$，$\therefore y=\dfrac{-27}{5k^2-4}$，$\therefore T\left(0,\dfrac{-27}{5k^2-4}\right)$

则$|TF|=\left|3+\dfrac{27}{5k^2-4}\right|=\left|\dfrac{15k^2+15}{5k^2-4}\right|$ ……………………………………………………11 分

$\therefore \dfrac{|TF|}{|PQ|}=\dfrac{\left|\dfrac{15k^2+15}{5k^2-4}\right|}{\dfrac{20\left(k^2+1\right)}{\left|5k^2-4\right|}}=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………………12 分

22.（12 分）

（1）令$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}>0$ ……………………………………………………1 分

$\therefore x<1$，即函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1)$，函数$f(x)$的单调递减区间为$(1,+\infty)$

……………………………………………………2 分

当$x=\dfrac{1}{2}$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$，$\therefore$切点为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$

又$\because f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$，$\therefore f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处的切线方程为：

$y-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$ ……………………………………………………4 分

（2）$\dfrac{ex^2}{e^x}\le k\cdot(\ln x+1)$，$\dfrac{x}{e^x}\le k\cdot\dfrac{\ln x+1}{ex}=k\cdot\dfrac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}$

$\because x\in(1,+\infty)$，$\therefore \dfrac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}>0$，$\therefore k\ge\dfrac{\frac{x}{e^x}}{\frac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}}$ ……………………………………………………6 分

由（1）可知$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$在$(1,+\infty)$上单调递减，下证：$x>\ln x+1$

即证：$x-\ln x>1$在$x\in(1,+\infty)$恒成立

令$g(x)=x-\ln x$，则$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增

又$\because x>1$，$\therefore g(x)>g(1)=1-\ln 1=1$ ……………………………………………………9 分

$\therefore x>\ln x+1>1$

$\because f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore f(x)<f(\ln x+1)$，即 $\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}$，$\therefore \dfrac{\frac{x}{e^x}}{\frac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}}<1$ ……………………11 分

$\therefore k\geq 1$ ………………………………………………………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。