

2021 北京东直门中学高三（上）期中

数 学

2021.11

命题人：李伟峰

审稿人：盛晓艳

考试时间：120 分钟

总分：150 分

班级_____姓名_____学号_____

第一部分（选择题）

一、选择题：（本题有 12 道小题，每小题 4 分，共 48 分）

1 已知集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x^2 \leq 5\}$, 那么 $A \cap B =$

- A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{-2, 0, 2\}$ C. $\{0, 2\}$ D. $\{-2, 2\}$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 以 Ox 为始边, 终边经过点 $P(-1, m)$ ($m \neq 0$), 则下列各式的值一定为负的是

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha$ B. $\sin \alpha - \cos \alpha$ C. $\sin \alpha \cos \alpha$ D. $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

3. 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 且 $\tan \alpha = \sqrt{2}$, 那么 $\sin \alpha =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则“存在 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $\alpha = 2k\pi + \beta$ ”是“ $\cos \alpha = \cos \beta$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0, 1]$ 的函数, 那么“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

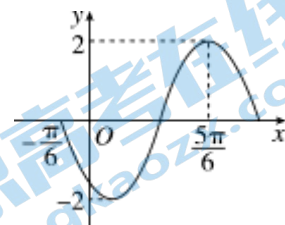
6. 下列函数中为偶函数的是

- A. $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ B. $y = \ln(1+x) + \ln(1-x)$
C. $y = x \cos x$ D. $y = x + \cos x$

7. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是

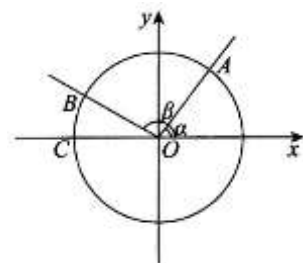
- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的表达式可以为



- A. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ B. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$
 C. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{4}\right)$ D. $f(x) = -2 \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 终边分别是射线 OA 和射线 OB . 射线 OA, OC 与单位圆的交点分别为 $A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), C(-1, 0)$. 若 $\angle BOC = \frac{\pi}{6}$,



则 $\cos(\beta - \alpha)$ 的值是

- A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$
 C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

10. 某辆汽车每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况.

加油时间	加油量(升)	加油时的累计里程(千米)
2015年5月1日	12	35000
2015年5月15日	48	35600

注: “累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程

在这段时间内, 该车每 100 千米平均耗油量为

- A. 6 升 B. 8 升 C. 10 升 D. 12 升

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $c = 2, \sin A = 2 \sin C, \cos B = \frac{1}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S =$

- A. 1 B. $2\sqrt{15}$ C. $\sqrt{15}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

12. 已知定义域为 \mathbb{R} 的奇函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. 若函数 $F(x) = f(x) - \sin \frac{\pi}{2} x$ 在区间 $[-3, m]$ ($m \in \mathbb{Z}$ 且 $m > -3$) 上至少有 5 个零点, 则 m 的最小值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

第二部分 (非选择题)

二、填空题: (本题有 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

13. 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(1-x)$ 的定义域是_____.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

15. 如果将函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi)$ ($-\pi < \varphi < 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位所得到的图象关于 y 轴对称, 那么 $\varphi =$ _____.

16. 已知 $x \in (0, 1)$, 令 $a = \log_3 x, b = \sin x, c = 2^x$, 那么 a, b, c 之间的大小关系为_____.

17. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$, 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B =$ _____; $\frac{c}{a}$ 的取值范围是 _____.

三、解答题: (本题有6小题, 共77分)

18. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin x \cos x$.

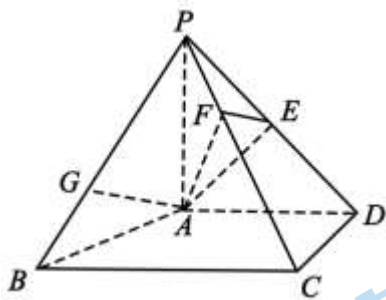
- (I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (II) 若 $f(x)$ 在区间 $[m, 0]$ 上的最小值为 -1 , 求 m 的最大值.

19. (本小题满分13分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B$, $C = \frac{2\pi}{3}$.

- (I) 求 B 的大小;
 (II) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求出 BC 边上的中线的长度.
 ① $c = \sqrt{2}b$; ② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

20. (本小题满分13分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA = AD = CD = 2$, $BC = 3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

- (I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;
 (II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;
 (III) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{3}{4}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



21.(本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{e^x}$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(III) 若对任意 $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) \geq -\frac{1}{e^2}$ 成立, 求实数 a 的最小值.

22.(本小题满分 13 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $P(\sqrt{2}, 1)$. 直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大值;

(III) 设直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N . 判断 $|PM|, |PN|$ 的大小关系, 并加以证明.

23.(本小题满分 13 分) 有限个元素组成的集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 记集合 A 中的元素个数为 $\text{card}(A)$, 即 $\text{card}(A) = n$. 定义 $A + A = \{x + y \mid x \in A, y \in A\}$, 集合 $A + A$ 中的元素个数记为 $\text{card}(A + A)$, 当 $\text{card}(A + A) = \frac{n(n+1)}{2}$ 时, 称集合 A 具有性质 P .

(I) $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, 判断集合 A, B 是否具有性质 P , 并说明理由;

(II) 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, 2020\}$, $a_1 < a_2 < a_3 < 2020$ 且 $a_i \in \mathbf{N}^*$ ($i = 1, 2, 3$), 若集合 A 具有性质 P , 求 $a_1 + a_2 + a_3$ 的最大值;

(III) 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 其中数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且公比为有理数, 判断集合 A 是否具有性质 P 并说明理由.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。