房山区 2021-2022 学年度第一学期期中学业水平调研

高二数学

本调研卷共 4 页，共 150 分。时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在调研卷上作答无效。调研结束后，将答题卡交回，调研卷自行保存。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）复数 $z=i$ 在复平面内对应的点的坐标为

（A）$(0,\ 1)$　　（B）$(1,\ 0)$　　（C）$(0,\ -1)$　　（D）$(-1,\ 0)$

（2）已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$，则平面 ABC 的一个法向量为

（A）$(3,2,-3)$　　（B）$(3,2,3)$　　（C）$(3,-2,3)$　　（D）$(3,-2,-3)$

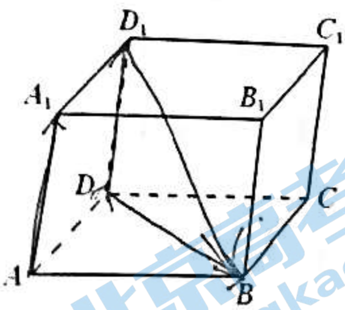
（3）如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=$

（A）$\overrightarrow{AC_1}$

（B）$\overrightarrow{A_1C}$

（C）$\overrightarrow{D_1B}$

（D）$\overrightarrow{DB_1}$



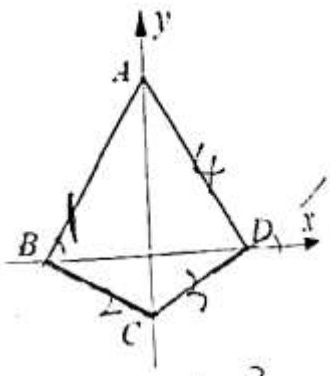
（4）已知平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的四条边 AB，BC，CD，DA 所在的直线分别为 l_1，l_2，l_3，l_4，如图所示，它们的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，k_4，则

（A）$k_2<k_4<k_3<k_1$

（B）$k_2<k_4<k_1<k_3$

（C）$k_4<k_2<k_1<k_3$

（D）$k_4<k_2<k_1<k_3$



（5）已知 v_1，v_2 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，那么“v_1，v_2 不平行”是“l_1，l_2 异面”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）平行直线 $l_1: x+2y-3=0$ 与 $l_2: 2x+4y-1=0$ 之间的距离等于

$2x+4y-6=0$

（A）$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）$\frac{7\sqrt{5}}{10}$　　（D）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

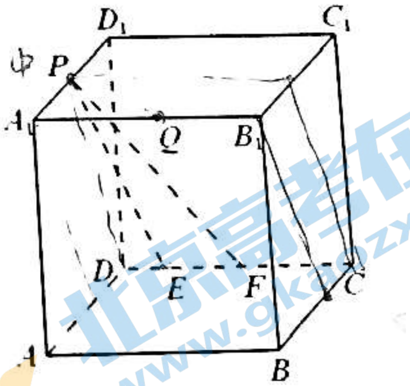
（7）若直线 $2x-y+a=0$ 平分圆 $x^2+y^2-4x+4y=0$ 的周长，则 a 的值为

（A）6　　（B）-6　　（C）2　　（D）-2

（8）若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切，则 $m=$

（A）-11　　（B）16　　（C）21　　（D）9

（9）如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 A_1D_1 的中点，Q 为 A_1B_1 上任意一点，E，F 为 CD 上两个动点，且 EF 的长为定值，则点 Q 到平面 PEF 的距离



（A）等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

（B）和 EF 的长度有关

（C）等于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

（D）和点 Q 的位置有关

（10）已知平面内一点 $M(3,4)$，若直线 l 上存在点 P，使 $|PM|=2$，则称该直线为点 $M(3,4)$ 的“2 域直线”，下列直线中不是点 $M(3,4)$ 的“2 域直线”的是

（A）$4x-3y=0$　　（B）$y=2$

（C）$x-4y=0$　　（D）$x=5$

第二部分（非选择题 共100分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（11）复数 $z=(1+2i)^2$ 的实部是 -3 .

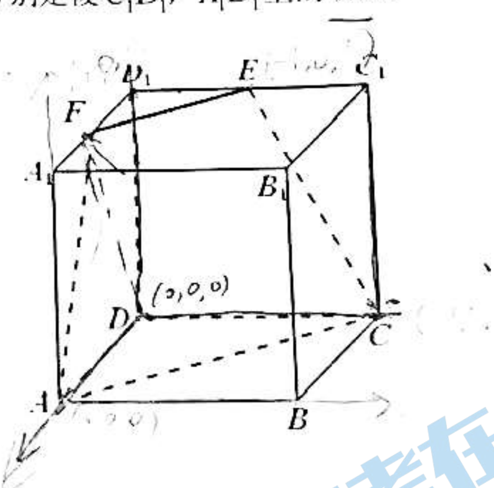
（12）若复数 $\dfrac{a+2i}{2+i}$ 是纯虚数，则实数 $a=$ -1 .

（13）已知点 P 是圆心为 $A(4,-3)$，半径为1的圆上一点，点 P 到原点的距离的最小值为 4 .

（14）在空间直角坐标系中，点 $A(1,2,3)$ 到 x 轴的距离为 $\sqrt{13}$.

（15）已知点 $P(x,\ y)$ 在直线 $x-y+3=0$ 上，当 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 时，$\dfrac{y+1}{x-1}$ 的取值范围是 $[-\frac{3}{2},$.

（16）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是棱 C_1D_1，A_1D_1 上的动点．给出下面四个命题：



①点 B，D 到平面 ACE 的距离相等；

②点 E，F 到直线 AC 的距离相等；×

③直线 AF 与直线 CE 所成角的最大值是 $\dfrac{\pi}{3}$；

$\vec{n}=(1,0,-a)$ $\vec{n}=(1,1,1-b)$

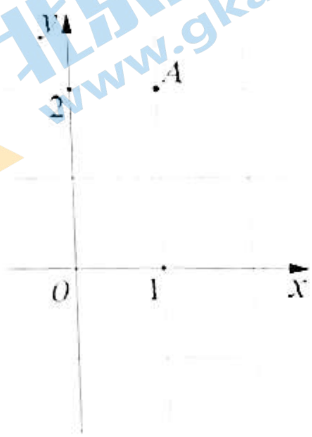
④平面 CDF 与平面 ACE 所成角的最大值是 $\dfrac{\pi}{2}$.

其中，真命题的序号为 ______.

三、解答题共5小题，共70分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题14分）

如图，在复平面内，复数 z 对应的点为 A.



（Ⅰ）写出复数 z 及 $|z|$ 的值；

（Ⅱ）若 $z_1=\dfrac{z}{i}$，求 z_1，并在复平面内标出 z_1 对应的点 B.

(18)（本小题 14 分）

已知三条直线 $l_1: x+ay-1=0$，$l_2: 3x-by-7=0$，$l_3: 3x-4y+5=0$，其中直线 l_1、l_2 的交点为 $M(2,-1)$.

（Ⅰ）求点 a 与 b 的值；

（Ⅱ）求过点 M 且与直线 l_3 平行的直线方程；

（Ⅲ）求过点 M 且与直线 l_3 垂直的直线方程.

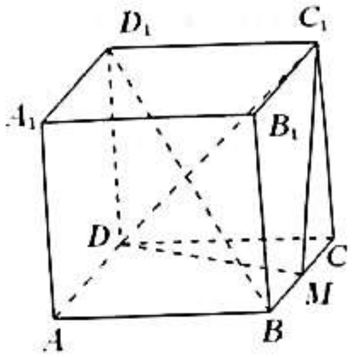
(19)（本小题 14 分）

如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 是 BC 的中点.

（Ⅰ）求证：$BD_1 \parallel$ 平面 C_1DM；

（Ⅱ）求直线 BD_1 到平面 C_1DM 的距离；

（Ⅲ）求直线 AA_1 与平面 C_1DM 所成角的正弦值.



(20)（本小题 14 分）

已知圆 M 的圆心坐标为 $M(2,3)$,圆上一点 $A(4,5)$.

（Ⅰ）求圆的标准方程；

（Ⅱ）求过点 A 的圆的切线方程；

（Ⅲ）若在圆 M 上存在两点 P，Q，使得四边形 $MAPQ$ 为菱形，求直线 PQ 的方程.

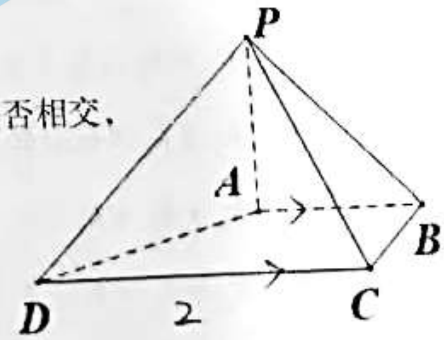
(21)（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 面$ABCD$，$AB \parallel CD$，且 $CD=2$，$PA=AB=BC=1$，$AB\perp BC$.

（Ⅰ）求证：$AD\perp PC$；

（Ⅱ）求平面 PDC 与平面 PBC 所成角的余弦值；

（Ⅲ）若 PB 的中点为 M，判断直线 AM 与平面 PDC 是否相交，如果相交，求出 P 到交点 H 的距离.



2021 北京房山高二（上）期中数学

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	C	C	B	A	B	D	A	C

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

（11）-3；

（12）-1；

（13）4

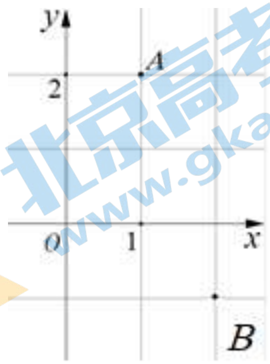
（14）$\sqrt{13}$

（15）$[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{2}{3}]$

（16）①，③，④ (含②得 0 分，部分得 3 分，全对得 5 分)

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）　（本小题 14 分）7，7



解：（I）复数 $z=1+2\mathrm{i}$，--------4 分

$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.--------3 分

（II）$z_1=\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=2-\mathrm{i}$，

--------4 分

z_1 对应的点 $B(2,-1)$，如图所示.--------3 分

（18）（本小题 14 分）4，5，5

解：(I) 因为直线 l_1，l_2 的交点为 $M(2,-1)$.

所以 $\begin{cases}2-a-1=0,\\6+b-7=0.\end{cases}$--------2 分

解得$\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$-------2 分

（II）解法一：直线l_3的方程可化为：$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，

所以$k_{l_3}=\frac{3}{4}$.-------2 分

设过点M且与直线l_3平行的直线方程为$y=\frac{3}{4}x+b$，-------1 分

因为所求直线过点$M(2,-1)$，所以$-1=\frac{3}{2}+b$，解得$b=-\frac{5}{2}$，

所以，过点M且与直线l_3平行的直线方程为$y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$，

即$3x-4y-10=0$.-------2 分

解法二：设过点M且与直线l_3平行的直线方程为$3x-4y+m=0(m\neq 5)$.-------3 分

因为所求直线过点$M(2,-1)$，所以$3\times 2-4\times(-1)+m=0$，解得$m=-10$.

所以，$3x-4y-10=0$为所求直线方程.-------2 分

（III）

解法一：因为直线l_3的方程可化为：$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，

所以$k_{l_3}=\frac{3}{4}$.

设过点M且与直线l_3垂直的直线方程为$y=-\frac{4}{3}x+m$.-------3 分

因为所求直线过点$M(2,-1)$，所以$-1=-\frac{4}{3}\times 2+m$，得$m=\frac{5}{3}$，

所以过点M且与直线l_3垂直的直线方程为:$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$，

即 $4x+3y-5=0$.-------2 分

解法二：设过点 M 且与直线 l_3 垂直的直线方程为 $4x+3y+n=0$.-------3 分

因为所求直线过点 $M(2,-1)$，所以 $4\times2+3\times(-1)+n=0$，解得 $n=-5$.

所以，$4x+3y-5=0$ 为所求直线方程.-------2 分

（19）（本小题 14 分）4，6，4

解：坐标系-------1 分

（I）连结 D_1C 交 C_1D 于点 N，连结 MN，

因为四边形 DCC_1D_1 为正方形，所以 N 是 D_1C 中点

$\because$ M 是 BC 的中点，-------中点 1 分（或者坐标 BD_1 ）

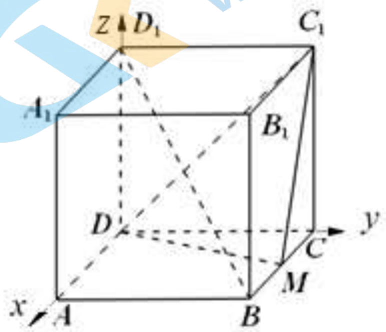
$\therefore$ $MN \parallel BD_1$.-------线线平行 1 分（或者点积为 0）

又$\because$ $MN\subset$ 平面 C_1DM ，$BD_1\not\subset$ 平面 C_1DM ,-------不在面内 1 分

$\therefore$ $BD_1 \parallel$ 平面 C_1DM .-------结论 1 分

（II）因为 DA, DC, DD_1 两两互相垂直，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$M(\frac{1}{2},1,0)$，



$\therefore$ $\overrightarrow{DM}=(\frac{1}{2},1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{D_1C_1}=(0,1,0)$.

设平面 C_1DM 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0.\end{cases}\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0\\ y+z=0.\end{cases}$$

令 $x=2$，则得 $y=-1$，$z=1$，此时 $\vec{n}=(2,-1,1)$.-------法向量 2 分

$\because BD_1 \parallel$ 平面 C_1DM，

$\therefore$ 直线 BD_1 到平面 C_1DM 的距离即为点 D_1 到平面 C_1DM 的距离.-------1 分(无，不扣)

$\therefore d=\dfrac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|0\times2+1\times(-1)+0\times1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.-------公式 1 分

$\therefore$ 线 BD_1 到平面 C_1DM 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.-------结论 1 分

（III）$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，$\vec{n}=(2,-1,1)$-------直线 1 分

$\therefore \cos<\overrightarrow{AA_1},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AA_1}||\vec{n}|}=\dfrac{0\times0+0\times(-1)+1\times1}{1\times\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.-------公式 1 分

设直线 AA_1 与平面 C_1DM 所成角为 θ，

$\therefore \sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AA_1},\vec{n}>|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$-------公式 1 分

$\therefore$ 直线 AA_1 与平面 C_1DM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.-------结论 1 分

（20）（本小题 14 分）4，5，5

解：（I）由题意可得圆的半径 $r=\sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$，-------2 分

所以圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=8$；-------2 分

（II）方法一：过圆心和切点的直线的斜率 $k_{AM}=\dfrac{5-3}{4-2}=1$，-------2 分

因为过点 A 的圆的切线与直线 AM 垂直，所以圆的切线斜率为 -1，

所以直线的点斜式直线方程为：$y-5=-(x-4)$，-------2 分

即 $x+y-9=0$ 为所求直线方程.-------1 分

方法二：如果切线的斜率不存在，则切线方程为 $x=4$，不符合题意.-------1 分

所以，所求切线的斜率存在，设过点 A 的圆的切线方程为 $y=kx+b$；

依题意得 $\begin{cases} 4k+b=5, \\ \dfrac{|2k-3+b|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}, \end{cases}$ -------2 分

解得：$\begin{cases} k=-1, \\ b=9. \end{cases}$ -------1 分

所以过点 A 的圆的切线方程为 $y=-x+9$,

即 $x+y-9=0$.-------1 分

（III）因为四边形 $MAPQ$ 为菱形，所以 $k_{PQ}=k_{AM}=1$，-------2 分

可设直线 PQ 的方程为 $y=x+b$.

又因为四边形 $MAPQ$ 为菱形,

所以 ΔMPQ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形， $MP=MQ=PQ=2\sqrt{2}$，

所以圆心 M 到直线 PQ 的距离 $d=\dfrac{|2-3+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$，-------2 分

解得 $b=1\pm2\sqrt{3}$，

所以直线 PQ 的方程为 $y=x+1\pm2\sqrt{3}$，即 $x-y+1\pm2\sqrt{3}=0$.-------1 分

（21）（本小题 14 分）4,4,6

解：（I）$\because AB /\!/ CD$， $AB\perp BC$， $AB=BC=1$， $CD=2$，

$\therefore AC=\sqrt{2}, \angle BAC=\angle DCA=45^\circ$.

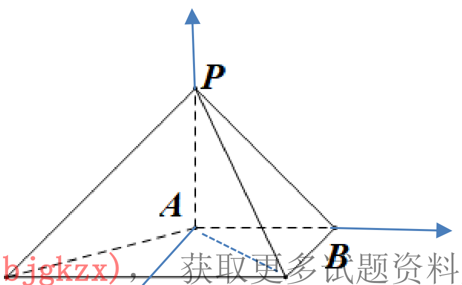
$\therefore$ 在 ΔDAC 中，由余弦定理得 $AD=\sqrt{2}$.

$\therefore AC^2+AD^2=DC^2$.

$\therefore AC\perp AD$.-------1 分

又 $PA\perp$ 面$ABCD$，$\therefore AD\subset$ 平面$ABCD$.

$\therefore PA\perp AD$.-------1 分



又$\because AC \cap PA = A$，

$\therefore AD \perp$ 平面PAC .-------1 分

$\because PC \subset$ 平面PAC，

$\therefore AD \perp PC$.-------1 分

解法二：$\overrightarrow{AD} = (1, -1, 0)$ -------1 分

$\overrightarrow{PC} = (1, 1, -1)$ -------1 分

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PC} = 1 - 1 + 0 = 0$ -------1 分

$\therefore AD \perp PC$.-------1 分

（II）取 CD 中点 N，连结 AN .

$\because AB // CD$， $CD = 2$， $AB = 1$， $CN = 1$，

$\therefore AB // NC$，$AB = NC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCN$ 是平行四边形.

$\therefore AN // BC$.

$\because AB \perp BC$，

$\therefore AB \perp AN$.

$\because PA \perp$ 面$ABCD$，

$\therefore PA \perp AN$，$PA \perp AB$.

$\therefore$ 以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

-------1 分

则 $A(0,0,0)$， $B(0,1,0)$， $C(1,1,0)$， $D(1,-1,0)$， $P(0,0,1)$.

$\therefore \overrightarrow{PC} = (1,1,-1)$， $\overrightarrow{BC} = (1,0,0)$， $\overrightarrow{DC} = (0,2,0)$.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，则

$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x+y-z=0, \\ x=0. \end{cases}$

令 $y=1$，则得 $z=1$，此时 $\vec{n}=(0,1,1)$--------1 分

设平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y=0. \end{cases}$

令 $x=1$，则得 $z=1$，此时 $\vec{m}=(1,0,1)$.--------1 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1\times0+0\times1+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

设平面 PDC 与平面 PBC 所成角为 θ，

$\therefore \cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 平面 PDC 与平面 PBC 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$.--------1 分

（III）$\because M(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{AM}=(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$\vec{m}=(1,0,1)$.

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}=\dfrac{1}{2}\neq0$.--------1 分

$\therefore$ 直线 AM 与平面 PDC 相交.--------1 分

设 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AM}$，所以 $H(0,\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{1}{2}\lambda)$.

$\therefore \overrightarrow{PH}=(0,\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{1}{2}\lambda-1)$.--------1 分

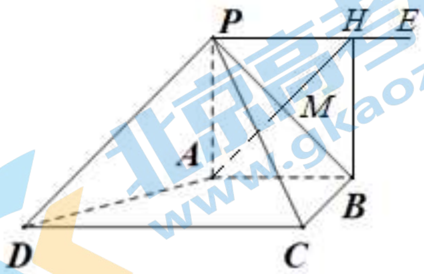
$\because \overrightarrow{PH}\cdot\vec{m}=0$，--------1 分

$\therefore \dfrac{1}{2}\lambda-1=0,\ \lambda=2$.--------1 分

$\therefore \overrightarrow{PH}=(0,1,0), PH=1$，

$\therefore P$ 到交点 H 的距离为 1.--------1 分

解法二：



在平面 PAB 中，作 $PE\,//\,AB$.-------1 分

$\because AB\,//\,CD$，-------1 分

$\therefore PE\,//\,CD$.-------1 分

所以 PE 是平面 PAB 与平面 PCD 的交线-------1 分

在平面 PAB 中，$AM\bigcap PE=H$，H 就是直线 AM 与平面 PDC 的交点，-------1 分

$PANH$ 是正方形，$PH=1$，$\therefore P$ 到交点 H 的距离为 1.-------1 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。