2019年浙江大学自主招生试题解析

福建省厦门市 叶超杰

1. 已知$\alpha=\dfrac{\pi}{7}$，求$\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha$的值

解： 令$a=\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}$，则

$$2a\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$

由积化和差公式可知

$$2\text{a}\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}$$

化简可得

$$a=\frac{1}{2}$$

2. 已知$S=\{1,2,3,4\}$，若$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|$的平均数为最简分数$\dfrac{q}{p}$，其中a_1，a_2，a_3，$a_4\in S$，则$p+q$的值为________

解： 易知$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|$的最小值为0，最大值为6，则平均数为

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$$

所以$p+q=9$

3. 动圆过定点$(a,0)$，且圆心到y轴的距离为$2a$，则圆心的轨迹是（　）

$A.$ 椭圆　　$B.$ 双曲线　　$C.$ 抛物线　　$D.$ 无法确定

解： 因为圆心到y轴的距离为$2a$，所以圆心在直线$x=2a$或$x=-2a$上，且圆心的轨迹是一个动圆截直线，所截的图象依然还是一条直线，所以圆心的轨迹为直线，故无答案

4. 一枚质地均匀的硬币，扔硬币10次，正面朝上次数多的概率为______

解： 易知

$$p=\frac{C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}}{2^{10}}=\frac{193}{512}$$

5. 已知$x^2+y^2+z^2=1$，求$\sqrt{3}xy+yz$的最小值

解： 由常见不等式可知

$$1=x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{4}y^2+z^2\geqslant-\sqrt{3}xy-yz$$

解得

$$\sqrt{3}xy+yz\geqslant-1$$

当且仅当$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$，$z=-\dfrac{1}{2}y$时，等号成立，则$\sqrt{3}xy+yz$的最小值为-1

6. 已知$p(n)$为n次的整系数多项式，若$p(0)$和$p(1)$均为奇数，则（　）

A. $p(n)$无整数根　　B. $p(n)$可能有负整数根　　C. $p(n)$无解　　D. 忘了

解： 设$p(n)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，因为$p(0)$喝$p(1)$为奇数，则

$$a_0\text{为奇数，}a_1+a_2+\cdots+a_n\text{为偶数}$$

假设$p(n)$有整数根，设$p(x_0)=0$，易知$x_0|a_0$，则

$$x_0\text{为奇数}$$

情形一：当a_1，a_2，$\cdots$，a_n全是偶数时，则此时易知

$$p(x_0)\text{为奇数}$$

情形二：当a_1，a_2，$\cdots$，a_n中有奇数时，而$a_1+a_2+\cdots+a_n$为偶数，则奇数必定是成对出现，则此时

$$p(x_0)\text{还是为奇数}$$

综上所述：$p(n)$无整数根，故选A

7. $3.\overline{abc}$是所有小数中最接近$\sqrt{11}$的数，求$a+b+c$的值

解： 易知$a=3$，$b=1$，$c=6$，则$a+b+c=10$

8. 已知$n\in N^*$，下列说法正确的是（　）

$A.$ 若$n\neq 3k,\ k\in N$，则$7|2^n-1$　　　　$B.$ 若$n=3k,\ k\in N$，则$7|2^n-1$

$C.$ 若$n\neq 3k,\ k\in N$，则$7|2^n+1$　　　　$B.$ 若$n=3k,\ k\in N$，则$7|2^n+1$

解： 情形一：当$n=3k$，$k\in N^*$时，则

$$2^n-1=8^k-1=(7+1)^k-1=C_k^k7^k+C_k^{k-1}7^{k-1}+\cdots+C_k^17$$

此时$7|2^n-1$，则B正确

情形二：当$n=3k-1$，$k\in N^*$时，则

$$2^n-1=\frac{8^k}{2}-1=\frac{(7+1)^k}{2}-1=\frac{1}{2}(C_k^k7^k+C_k^{k-1}7^{k-1}+\cdots+C_k^17-1)$$

此时$7|2^n-1$不成立

情形二：当$n=3k-2$，$k\in N^*$时，则

$$2^n-1=\frac{8^k}{4}-1=\frac{(7+1)^k}{4}-1=\frac{1}{4}(C_k^k7^k+C_k^{k-1}7^{k-1}+\cdots+C_k^17)-\frac{3}{4}$$

此时$7|2^n-1$不成立，则A错误，同理可得，$C,\ D$错误，综上所述：选B

9. 复数$|z_1|=|z_2|=1(z_1\neq z_2)$，满足$|z_k+1+i|+|z_k-1-i|=2\sqrt{3}\,(k=1,2)$，求$z_1z_2$

解： 设$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，则

$$\sqrt{(\cos\alpha+1)^2+(\sin\alpha+1)^2}+\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+(\sin\alpha-1)^2}=2\sqrt{3}$$

整理可得

$$\sqrt{3+2(\cos\alpha+\sin\alpha)}+\sqrt{3-2(\cos\alpha+\sin\alpha)}=2\sqrt{3}$$

解得

$$\sin\alpha+\cos\alpha=0$$

同理可得$\sin\beta+\cos\beta=0$，所以

$$\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k_1\pi,\ \beta=\frac{7\pi}{4}+2k_2\pi,\ \ k_1,k_2\in Z$$

而$z_1z_2=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$，所以

$$z_1z_2=i$$

10. 若$x>1$，且满足$x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$，求$x^5-\dfrac{1}{x^5}$

解： 因为$x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$，则

$$x^4+\frac{1}{x^4}=7,\ x-\frac{1}{x}=1$$

而

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^5-\frac{1}{x^5}-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$$

又$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=4$，所以

$$x^5-\frac{1}{x^5}=11$$

11. 已知点(a,b)在椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$上，求$2a+3b+4$的最大值与最小值的和

解： 设$a=2\cos\alpha,\ b=\sqrt{3}\sin\alpha$，则

$$\begin{aligned}2a+3b+4&=4\cos\alpha+3\sqrt{3}\sin\alpha+4\\&=\sqrt{43}\sin(\alpha+\varphi)+4\in\left[4-\sqrt{43},4+\sqrt{43}\right]\end{aligned}$$

所以$2a+3b+4$的最大值与最小值的和为8

12. 若将19表示为若干个正整数的和，则这些正整数的积的最大值为________

解： 设分拆中有x个2，y个3，则

$$2x+3y=19$$

当$x=2$时，此时乘积最大，乘积为

$$2^2\times3^5=972$$

故乘积的最大值为972

13. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$S_{n+1}=4a_n+3$，求$a_{2019}-2a_{2018}$的值

解： 易知$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$，则

$$a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$$

此时有

$$a_n-2a_{n-1}=2^n$$

整理可得

$$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$$

所以

$$a_n=n\times2^n-2^{n-1}$$

则

$$a_{2019}-2a_{2018}=2^{2019}$$

14. 定义在R上的偶函数$f(x)$满足$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，求$f\left(\frac{121}{2}\right)$

解： 因为$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，则

$$f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=-\frac{1}{4}$$

令$g(x)=f^2(x)-f(x)$，则

$$g(x+1)+g(x)=-\frac{1}{4}$$

由上式可知$g(x)$具有周期性，周期为2，而$f(x)$为偶函数，所以$g(x)$也为偶函数，则

$$g\left(\frac{121}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right),\ g\left(-\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

解得

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

此时

$$f^2\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}，且f(x)\geqslant\frac{1}{2}$$

解得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

所以$f\left(\frac{121}{2}\right)$的值为$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

15. 若p,q是方程$x^2+6x+5a-a^2=0$的两根，且满足$q+8p=p^3$，则a的可能取值有多少个？

解： 由韦达定理可知

$$\begin{cases} p+q=-6 \\ pq=5a-a^2 \\ \varDelta=36-4(5a-a^2) \end{cases}$$

又$q+8p=p^3$，则

$$(p-1)(p-2)(p+3)=0$$

情形一：当$p=1$时，$q=-7$，则

$$a^2-5a-7=0\text{，且}\varDelta>0$$

所以此时a的值有两个

情形二：当$p=2$时，$q=-8$，则

$$a^2-5a-16=0\text{，且}\varDelta>0$$

所以此时a的值有两个

情形三：当$p=-3$，$q=-3$，则

$$a^2-5a+9=0\text{，易知此时}a\text{无解}$$

综上所述：a的可能值有4个

16. $\triangle ABC$的顶点$A(-p,0)$, $B(p,0)$，其内心在直线$x=q$上，且$p>q>0$，则顶点C的轨迹方程为________

解： 易知C点的轨迹为双曲线，且$c=p$, $a=q$，所以顶点C的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{q^2}-\frac{y^2}{p^2-q^2}=1$$