2019～2020学年高三11月质量检测巩固卷

数　学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语，函数，导数，三角函数，三角恒等变换，解三角形，平面向量，数列，不等式，立体几何。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x\mid y=\log_2(x+2)\}$，$B=\{x\mid 0<x<1\}$，则 $\complement_A B=$

A. $(-2,1)$　　B. $(-2,0]\cup[1,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-2,0)\cup(1,+\infty)$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,8)$，$\boldsymbol{b}=(2^x,4)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $x=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 下列说法正确的个数为

①若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$；②若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$；③若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；④若 $a>b>0$，$c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 已知曲线 $y=\frac{x^2}{2}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为2，则切点的横坐标为

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

5. 设 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是

A. 若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n/\!/\beta$，则 $m\perp n$　　B. 若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m\perp n$，$m/\!/\alpha$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$m/\!/n$，$n/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

6. 若不等式 $4x^2-12x-7>0$ 与关于 x 的不等式 $x^2+px+q>0$ 的解集相同，则 $x^2-px+q<0$ 的解集是

A. $\left\{x\mid x>\frac{7}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{x\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}\right\}$

C. $\left\{x\mid x<-\frac{7}{2}\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\mid -\frac{7}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$

7. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，若将该函数的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后，所得图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则函数 $f(x)$ 的解析式为

A. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　B. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

8. 关于 x 的不等式 $x^2-4ax+3a^2<0(a>0)$ 的解集为 (x_1,x_2)，则 $x_1+x_2+\frac{a}{x_1x_2}$ 的最小值是

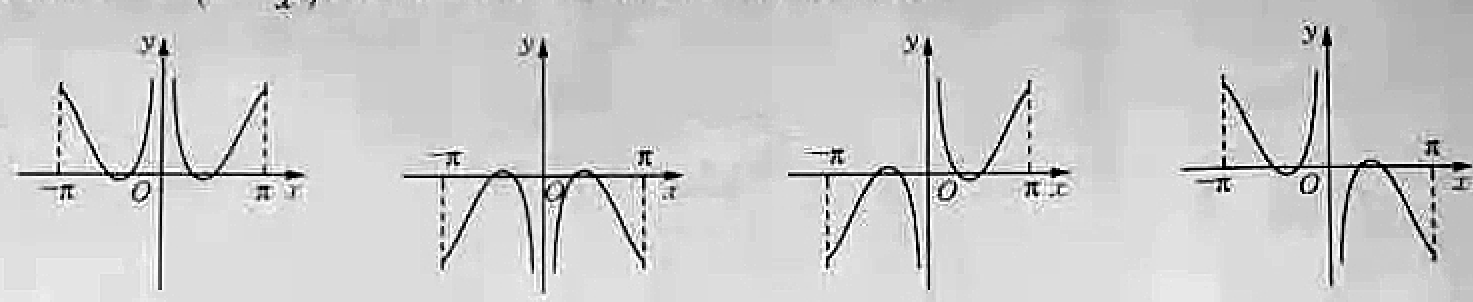
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为

A. $a_n=\ln n$　　B. $a_n=(n-1)\ln(n+1)$

C. $a_n=n\ln n$　　D. $a_n=\ln n+n-2$

10. 函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\cos x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 且 $x\neq0)$ 的图象可能为



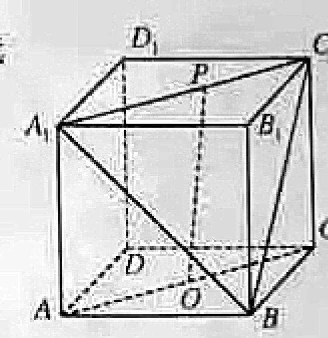
A　　B　　C　　D

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，若 $g(x)=f(x+2)$ 是奇函数，且 $g(-2)=0$，则不等式 $f(x)\geqslant0$ 的解集是

A. $[-4,0]\cup[2,+\infty)$　　B. $[-4,-2)\cup[0,+\infty)$

C. $[0,2]\cup[4,+\infty)$　　D. $[-2,4]$

12. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 AC 中点，点 P 在线段 A_1C_1 上，若直线 OP 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta$ 的取值范围是



A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=0$，$a_k=2\ 019$，则 $a_1+a_{k+1}=$________.

14. 若命题"$\exists x_0\in[-1,1]$，$x_0^2+3x_0+a>0$"为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

15. 设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-2\leqslant0,\\x+2y-5\geqslant0,\\y-2\leqslant0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+3y$ 的取值范围为________.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点均在半径为 2 的球面上，且 $AB=3$，$BC=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

在△ABC 中,角 A、B、C 的对边分别为 a,b,c,$\frac{2\tan B}{\tan B+1}=\sqrt{8}(\tan B-1)$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 B 是锐角,$b=4$,$a^2+c^2=32$,求△ABC 的面积.

18.(本小题满分 12 分)

2018 年某开发区一家汽车生产企业计划引进一批新能源汽车制造设备,通过市场分析,全年需投入固定成本 3 000 万元,生产 x(百辆),需另投入成本 $C(x)$ 万元,且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+200x,0<x<50,\\601x+\frac{10\ 000}{x}-9\ 000,x\geqslant 50.\end{cases}$ 由市场调研知,每辆车售价 6 万元,且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

(1)求出 2018 年的利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(百辆)的函数关系式;(利润=销售额−成本)

(2)2018 年产量为多少百辆时,企业所获利润最大?并求出最大利润.

19.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,将函数 $f(x)$ 图象上所有的点向左平行移动 $\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象.

(1)若 $\theta=\frac{2}{3}\pi$,求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2)若 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上是单调增函数,求 θ 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且 $\ln a_1=\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln(b_{n+1}-b_n)$，$T_3=2a_1$，$T_1=2a_1$.

(1)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

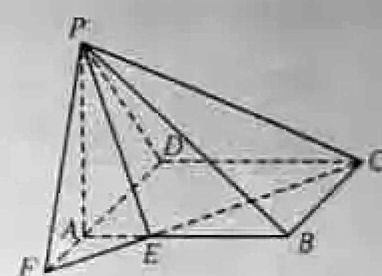
(2)求证：$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}<2$.

21.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$\triangle PAD$ 是等腰三角形，$AB=2AD$，E 是 AB 的一个三等分点（靠近点 A），CE 与 DA 的延长线交于点 F，连接 PF.

(1)求异面直线 PD 与 EF 所成角的余弦值；

(2)求二面角 $A-PE-F$ 的正切值.



22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{a}{x}+a+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a>0$，证明：函数 $f(x)$在区间$[\sqrt{e},+\infty)$上单调递减；

(2)是否存在实数 a 使得函数 $f(x)$在区间$(0,8)$内存在两个极值点？若存在，求出实数 a 的取值范围；若不存在，也请说明理由.

参考数据：$\ln 2\approx0.693$，$e^{\frac{3}{2}}\approx4.5$

2019～2020 学年高三 11 月质量检测巩固卷 · 数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. B　由集合 $A=\left\{x\middle|y=\log_2(x+2)\right\}=\left\{x\middle|x>-2\right\}$，又因为 $B=\{x|0<x<1\}$，所以 $\complement_A B=\left\{x\middle|-2<x\leq 0 \text{ 或 } x\geq 1\right\}$，故选 B.

2. B　由 $a/\!/b$，得 $4-8\times 2^x=0$，解得 $x=-1$. 故选 B.

3. B　①∵$a>|b|\geq 0$，∴$a^2>b^2$ 成立，∴①正确；②取 $a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=-2$，则 $2-3<1-(-2)$，故②错误；③取 $a=4$，$b=1$，$c=-1$，$d=-2$，则 $4\times(-1)<1\times(-2)$，故③错误；④∵$a>b>0$，∴$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，又 $c<0$，∴$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，∴④正确.

4. A　设切点坐标为 (x_0,y_0)，且 $x_0>0$，由 $y'=x-\frac{3}{x}$，得 $k=x_0-\frac{3}{x_0}=2$，∴$x_0=3$.

5. D　A 中，若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n/\!/\beta$，则 m，n 也有可能平行，故 A 错；

B 中，若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m/\!/\beta$，$n/\!/\alpha$，但 m，n 可能异面、平行，故 B 错；

C 中，若 $m\perp n$，$m/\!/\alpha$，$n\subset\beta$，则 α，β 可能平行或相交，故 C 错；

D 中，若 $m\perp\alpha$，$m/\!/n$，则 $n\perp\alpha$，又 $n/\!/\beta$，所以 $\alpha\perp\beta$，即 D 正确. 故选 D.

6. D　由 $4x^2-12x-7>0$ 得 $(2x-7)(2x+1)>0$，则 $x>\frac{7}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$，由题意可得 $\begin{cases}-p=\frac{7}{2}-\frac{1}{2},\\ q=\frac{7}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right),\end{cases}$ 则 $\begin{cases}p=\frac{1}{2}-\frac{7}{2},\\ q=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{7}{2}\right),\end{cases}$ $x^2-px+q<0$ 对应方程 $x^2-px+q=0$ 的两根分别为 $\frac{1}{2}$，$-\frac{7}{2}$，则 $x^2-px+q<0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-\frac{7}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$，故选 D.

7. C　因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期是 π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$. 所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 将该函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后，得到图象所对应的函数解析式为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$. 由此函数图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，得 $2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 故选 C.

8. C　因为不等式 $x^2-4ax+3a^2<0(a>0)$ 的解集为 $(a,3a)$，所以 $x_1=a$，$x_2=3a$，所以 $x_1+x_2+\frac{a}{x_1x_2}=4a+\frac{a}{3a^2}=4a+\frac{1}{3a}\geq 2\sqrt{4a\times\frac{1}{3a}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故应选 C.

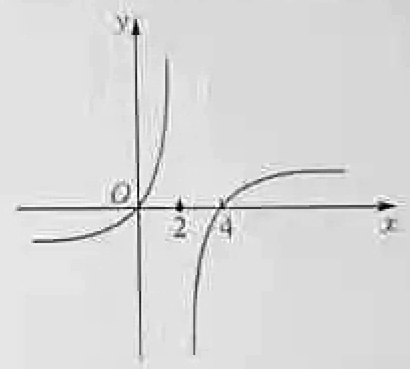
9. A　由已知得 $a_{n+1}-a_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，

所以 $a_n-a_{n-1}=\ln n-\ln(n-1)$，$a_{n-1}-a_{n-2}=\ln(n-1)-\ln(n-2)$，…，$a_2-a_1=\ln 2-\ln 1$，

所以 $a_n=\ln n-\ln 1=\ln n$. 故选 A.

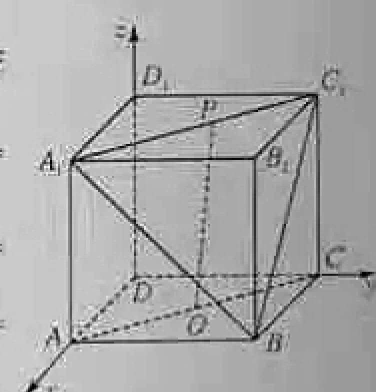
10. D $\because f(-x)=\left(-x+\frac{1}{x}\right)\cos(-x)=-\left(x-\frac{1}{x}\right)\cos x=-f(x)$，∴函数 $f(x)$ 为奇函数，∴函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故排除 A、B；当 $x=\pi$ 时，$f(\pi)=\left(\pi-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi=\frac{1}{\pi}-\pi<0$，故排除 C. 故选 D.

11. C $\because g(x)=f(x+2)$ 是奇函数，∴函数 $g(x)=f(x+2)$ 图象的对称中心为 $(0,0)$，∴函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(2,0)$. 又函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，∴函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上为增函数，且 $f(2)=g(0)=0$. $\because g(-2)=f(0)=0$，∴由对称性，$f(4)=0$. 画出函数 $f(x)$ 图象的草图（如图）.



结合图象可得 $f(x)\geqslant 0$ 的解集是 $[0,2)\cup[4,+\infty)$. 故选 C.

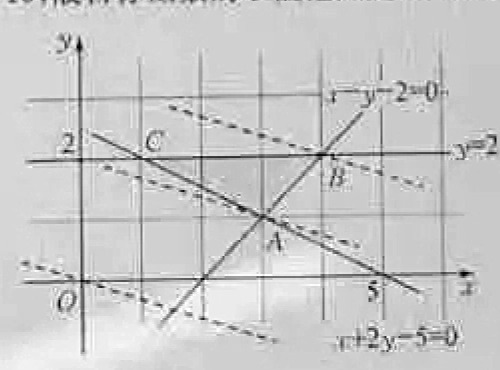
12. A 如图，设正方体棱长为 1，$\frac{A_1P}{A_1C_1}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$. 以 D 为原点，分别以 DA、DC、DD_1 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系. 则 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$P(1-\lambda,\lambda,1)$，所以 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,\lambda-\frac{1}{2},1\right)$. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可证 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1，所以 $\overrightarrow{B_1D}=(-1,-1,-1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量. 所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{B_1D}\rangle|=\frac{1}{\sqrt{6\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+3}}$. 所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\sin\theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，当 $\lambda=0$ 或 1 时，$\sin\theta$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 A.



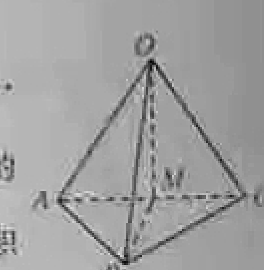
13. 2 019 因为 $a_2=0$，$a_k=2\ 019$，$2+k=1+k+1$，所以 $a_1+a_{k+1}=a_2+a_k=2\ 019$.

14. $(-\infty,-4]$ 由题意，可得 $\forall x\in[-1,1]$，$x^2+3x+a\leqslant 0$ 恒成立，即 $\begin{cases}a-2\leqslant 0,\\4+a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -4$.

15. $[6,10]$ 画出可行域，由图可知，当直线 $x+3y-z=0$ 过点 $A(3,1)$ 时，z 取最小值，则 $z_{\min}=6$；当直线 $x+3y-z=0$ 过点 $B(4,2)$ 时，z 取最大值，则 $z_{\max}=10$，故目标函数的取值范围是 $[6,10]$.



16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 设 O 为球心，则 $OA=OB=OC=2$，可得 O 在底面 ABC 的射影为 $\triangle ABC$ 的外心. 由 $AB=3$，$BC=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，可得 $\triangle ABC$ 是以 AC 斜边的直角三角形，O 在底面 ABC 的射影为斜边 AC 的中点 M，则 $OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$. 当 P，O，M 三点共线时，三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大，此时体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}\times(2+1)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



17. 解：(1) ∵ $\frac{2\tan B}{\tan B+1}=\sqrt{3}(\tan B-1)$，

∴ $\sqrt{3}\tan^2 B-2\tan B-\sqrt{3}=0$，………………………………………… 2分

解得 $\tan B=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\tan B=\sqrt{3}$. ………………………………………… 4分

又 $B\in(0,\pi)$，

∴ $B=\frac{5\pi}{6}$ 或 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5分

(2) ∵ B 是锐角，∴ $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 6分

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $a^2+c^2-ac-b^2=0$. ………………………… 7分

又 $b=4$，$a^2+c^2=32$，

∴ $ac=16$. ………………………………………… 8分

∴ $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. ………………………… 10分

18. 解：(1) 当 $0<x<50$ 时，

$L(x)=6\times100x-10x^2-200x-3\ 000=-10x^2+400x-3\ 000$；………………………… 3分

当 $x\geqslant50$ 时，

$L(x)=6\times100x-601x-\frac{10\ 000}{x}+9\ 000-3\ 000=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$.

∴ $L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\ 000, & 0<x<50,\\ 6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right), & x\geqslant50.\end{cases}$ ………………………… 5分

(2) 当 $0<x<50$ 时，$L(x)=-10(x-20)^2+1\ 000$，

∴ 当 $x=20$ 时，$L(x)_{\max}=L(20)=1\ 000$；………………………… 8分

当 $x\geqslant50$ 时，$L(x)=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)\leqslant6\ 000-2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=6\ 000-200=5\ 800$，

当且仅当 $x=\frac{10\ 000}{x}$，即 $x=100$ 时，$L(x)_{\max}=L(100)=5\ 800>1\ 000$. ………………… 10分

∴ 当 $x=100$，即 2018 年生产 100 百辆时，该企业获得利润最大，且最大利润为 5 800 万元. ……… 12分

19. 解：(1) 将函数 $f(x)$ 图象上所有的点向左平行移动 θ 个单位长度，得到图象对应的函数解析式为 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+2\theta\right)$.

当 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 时，函数 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi\right)=2\sin\left(2x+\frac{3}{2}\pi\right)=-2\cos2x$. ………………… 3分

(2) 由(1)可得 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+2\theta\right)$，

∴ 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}+2\theta\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\theta-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\theta+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

可得函数的单调递增区间为 $\left[k\pi-\theta-\frac{\pi}{3},k\pi-\theta+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………… 8分

∵ 函数 $y=g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上是单调增函数，

$\therefore \begin{cases} k\pi-\theta-\frac{\pi}{3}\leqslant 0, \\ k\pi-\theta+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{4}, \end{cases}$

解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………………… 10 分

$\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,

$\therefore k=1, \theta\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{12}\right]$.

$\therefore \theta$ 的取值范围为 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{12}\right]$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1) $\because \ln a_1=\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln(b_{n+1}-b_n)$,

$\therefore a_1=\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_{n+1}-b_n$.

故 $\{a_n\}$ 为等比数列, $\{b_n\}$ 为等差数列,公差和公比均为 a_1. ………………………………………… 2 分

由 $\begin{cases} T_2=2a_1, \\ T_4=2a_3, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2b_1+a_1=2a_1, \\ 4b_1+6a_1=2a_1^3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=2 \\ b_1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=0 \\ b_1=0 \end{cases}$ (舍去). ………………………… 4 分

故 $a_1=2, b_1=1$.

$\therefore \{a_n\}$ 为以 2 为首项,2 为公比的等比数列, $\therefore a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$;

$\{b_n\}$ 为以 1 为首项,2 为公差的等差数列, $b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………… 6 分

证明:(2) $\because b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,

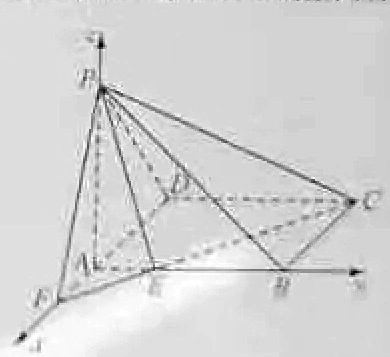
$\therefore T_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………………………………………… 8 分

故 $\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$ ……………………… 10 分

$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$=2-\frac{1}{n}<2$, 即证. ……………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)分别以 AF, AB, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系



因为 E 是 AB 的一个三等分点(靠近点 A),所以 $AE=\frac{1}{3}AB, EB=\frac{2}{3}AB$.

因为 $\triangle PAD$ 是等腰三角形,且 $PA\perp AD$,所以 $PA=AD$.

不妨设 $PA=AD=3$,则 $AB=6, BC=3, AE=2, EB=4$. ……………………………………………… 2 分

又由平行线分线段成比例,得 $\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{DC}=\frac{1}{1}$,所以 $AF=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$

所以点 $P(0,0,3)$，$E(0,2,0)$，$F\left(\frac{3}{2},0,0\right)$，$D(-3,0,0)$，则$\overrightarrow{PD}=(-3,0,-3)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{2},-2,0\right)$.

………………………………………………………………………………………… 4分

设异面直线 PD 与 EF 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},\overrightarrow{EF}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{PD}||\overrightarrow{EF}|}\right|=\left|\frac{(-3,0,-3)\cdot\left(\frac{3}{2},-2,0\right)}{3\sqrt{2}\times\frac{5}{2}}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

所以异面直线 PD 与 EF 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{2}}{10}$. ………………………………………… 6分

(2)建系，求点的坐标同(1)，则$\overrightarrow{PE}=(0,2,-3)$，$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{3}{2},0,-3\right)$.

设平面 PEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}2y-3z=0,\\ \frac{3}{2}x-3z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，得平面 PEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(4,3,2)$； ………………………………………… 8分

又易知平面 PEA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ………………………………………… 9分

设二面角 $A-PE-F$ 的大小为 φ，由题意得 φ 为锐角，

所以 $\cos\varphi=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\left|\frac{(4,3,2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{29}\times1}\right|=\frac{4}{\sqrt{29}}$， ………………………………… 11分

则 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

所以二面角 $A-PE-F$ 的正切值为$\frac{\sqrt{13}}{4}$. ………………………………………… 12分

22. 证明：(1)函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{a}{x}+a+1$ 的定义域是$(0,+\infty)$. ………………………… 1分

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{(x^2)^2}+a\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-2\ln x-ax}{x^3}(x>0)$. ………………………… 2分

设 $g(x)=1-2\ln x-ax$，则 $g'(x)=-\frac{2}{x}-a$.

若 $a>0$，则 $g'(x)<0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

所以函数 $g(x)=1-2\ln x-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 3分

又 $g(\sqrt{e})=1-2\ln\sqrt{e}-a\sqrt{e}=1-2\times\frac{1}{2}-a\sqrt{e}=-a\sqrt{e}(-a\sqrt{e}<0)$.

所以当 $x\in[\sqrt{e},+\infty)$ 时，满足 $g(x)\leqslant g(\sqrt{e})<0$.

所以当 $x\in[\sqrt{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间$[\sqrt{e},+\infty)$上单调递减. ………………………………………… 4分

解：(2)①当 $a>0$ 时，由(1)求解知，函数 $g(x)=1-2\ln x-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且存在某个实数 $x_0\in(0,\sqrt{e})$ 使得 $g(x_0)=0$. ………………………………………… 5分

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$.

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 只有 1 个极值点 x_0，不符合题意；…………………………………………………………………………………………… 6 分

②当 $a<0$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $x>-\frac{2}{a}$；令 $g'(x)<0$，得 $0<x<-\frac{2}{a}$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. …………………………… 7 分

要使函数 $f(x)$ 在区间 $(0,8)$ 内存在两个极值点，则 $\begin{cases} g\left(-\frac{2}{a}\right)<0, \\ g(8)>0, \\ 0<-\frac{2}{a}<8, \end{cases}$ …………………………………… 8 分

即 $\begin{cases} 1-2\ln\left(-\frac{2}{a}\right)-a\left(-\frac{2}{a}\right)<0, \\ 1-2\ln 8-8a>0, \\ 0<-\frac{2}{a}<8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a>-\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}, \\ a<\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\ln 2, \\ a<-\frac{1}{4}. \end{cases}$ …………………………………… 9 分

又 $e^{\frac{3}{2}}\approx 4.5$，$\ln 2\approx 0.693$，

所以 $-\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}<a<\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

故当 $a\in\left(-\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\ln 2\right)$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,8)$ 内存在两个极值点；…………………… 10 分

③当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+1$，$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\sqrt{e}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>\sqrt{e}$，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 只有 1 个极值点 $\sqrt{e}$，不符合题意.

…… 11 分

综上，存在实数 a 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(0,8)$ 内存在两个极值点，且实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\ln 2\right)$.

…… 12 分