2019-2020 学年度高三年级上学期四调考试

数学（理科）试卷

第Ⅰ卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分，下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

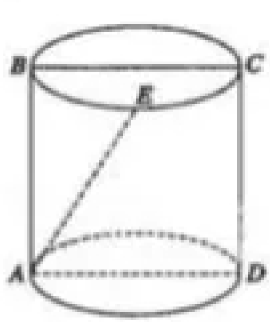
1．已知集合 $A=\{x\,|\,x(x-1)\leqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,y=ln(x-a)\}$，若 $A\bigcap B=A$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,0)$　　B．$(-\infty，0]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1，+\infty)$

2．AB 是抛物线 $y^2=2x$ 的一条焦点弦，$|AB|=4$，则 AB 中点 C 的横坐标是(　　)

A．2　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

3.如图，圆柱的轴截面 $ABCD$ 为正方形，E 为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，则异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为(　　)



A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　C．$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

4．已知 α、β 都为锐角，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$、$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，则 $\alpha-\beta=$(　　)

A．$-\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$-\dfrac{\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

5．设 $a\in R$，$b\in[0，2\pi)$，若对任意实数 x 都有 $\sin(3x-\dfrac{\pi}{3})=\sin(ax+b)$，则满足条件的有序实数

对 (a,b) 的对数为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

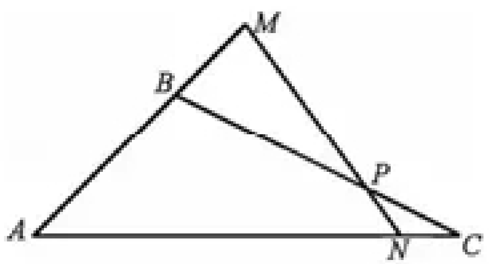
6. 已知 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点，点 P 在 C 上，O 为坐标原点，若 $|OP|=|OF|$，则 ΔOPF 的面积为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　　　B．$\frac{5}{2}$　　　　C．$\frac{7}{2}$　　　　D．$\frac{9}{2}$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，其前 n 项和为 S_n，若 S_3，S_9，S_{27} 成等比数列，则 $\frac{S_9}{S_3}=$（　　）

A．3　　　　B．6　　　　C．9　　　　D．12

8.在 ΔABC 中，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PC}$，过点 P 的直线与 AB，AC 所在的直线分别交于点 M，N，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为（　　）

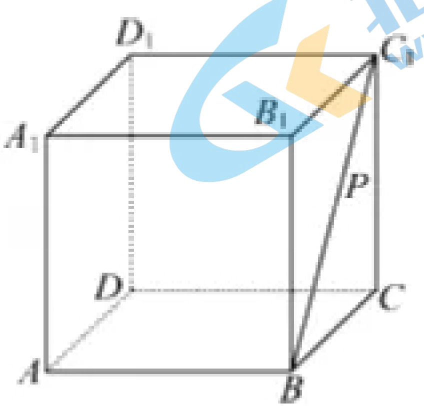


A．$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　　　C．$\frac{3}{2}$　　　　D．$\frac{5}{2}$

9.如图，点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动，则下列四个结论：

①三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变；② $A_1P//$ 平面 ACD_1；③ $DP\perp BC_1$；④平面 $PDB_1\perp$ 平面 ACD_1．

其中正确的结论的个数是（　　）

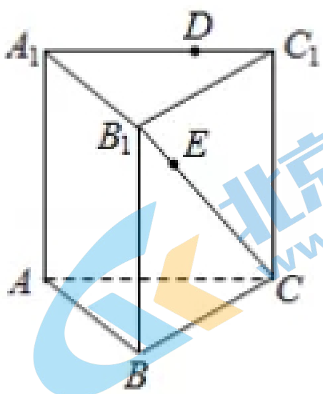


A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

10．过三点 $A(1,3)$、$B(4,2)$、$C(1,-7)$ 的圆截直线 $x+ay+2=0$ 所得弦长的最小值等于（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　　　B．$4\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{13}$　　　　D．$2\sqrt{13}$

11．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 6，点 D，E 分别在线段 A_1C_1，B_1C 上，$A_1C_1=3DC_1$，$B_1C=4B_1E$．点 A，D，E 所确定的平面把三棱柱切割成体积不相等的两部分，若底面△ABC 的面积为 6，则较大部分的体积为（　　）



A．22　　　　B．23　　　　C．26　　　　D．27

12．设 $D=\sqrt{(x-a)^2+(e^x-2\sqrt{a})^2}+a+2$．其中 $e\approx 2.71828$，则 D 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}+1$　　　　D．$\sqrt{3}+1$

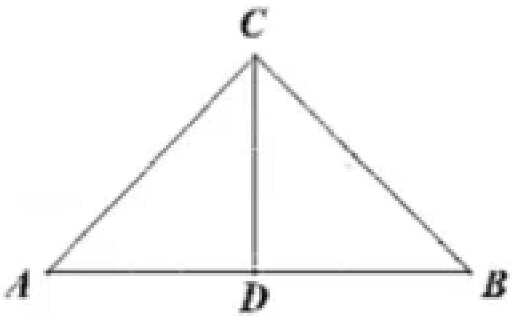
第Ⅱ卷（共 90 分）

二 、填空题：（本大题共4小题，每题5分，共20分）

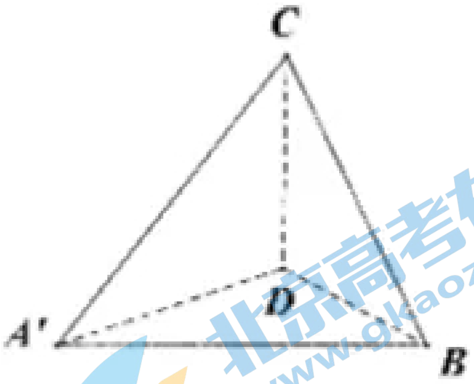
13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ 4-2^{-x}, x\leq 0\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{8}))=$____．

14．已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点，且点 A 是椭圆 C 上一点，点 M 的坐标为 $(2,0)$，若 AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线，则 $|AF_2|=$______．

15．如图（1），在等腰直角 ΔABC 中，斜边 $AB=4$，D 为 AB 的中点，将 ΔACD 沿 CD 折叠得到如图（2）所示的三棱锥 $C-A'BD$，若三棱锥 $C-A'BD$ 的外接球的半径为 $\sqrt{5}$，则 $\angle A'DB=$_______．



图(1)



图(2)

16．设定义在 D 上的函数 $y=h(x)$ 在点 $P(x_0，h(x_0))$ 处的切线方程为 $l: y=g(x)$，当 $x\neq x_0$ 时，若 $\dfrac{h(x)-g(x)}{x-x_0}>0$ 在 D 内恒成立，则称 P 点为函数 $y=h(x)$ 的“类对称中心点”，则函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2e^2}+\ln x$ 的“类对称中心点”的坐标是 ________．

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17．（本题满分 10 分）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle C=\pi$，$AB=1$，$BC=3$，$CD=DA=2$．

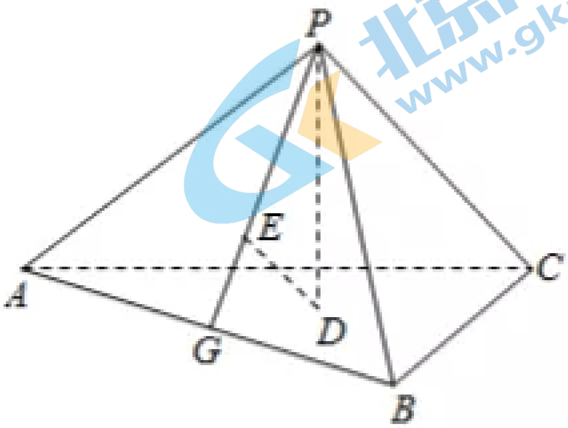
（1）求 $\angle C$；

（2）若 E 是 BD 的中点，求 CE．

18．（本题满分 12 分）如图，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形，$PA=6$，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G．

（1）证明：G 是 AB 的中点；

（2）在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由），并求四面体 $PDEF$ 的体积．



19.（本题满分 12 分）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，上顶点为 B．已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，$|AB|=\sqrt{13}$．

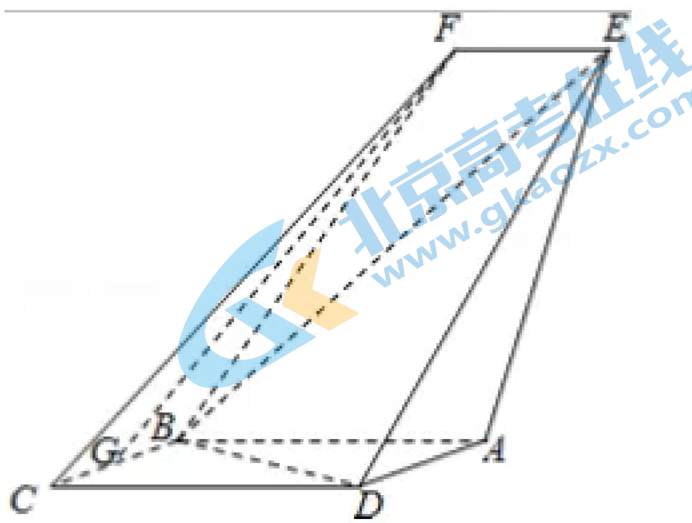
（1）求椭圆的方程；

（2）设直线 $l:y=kx(k<0)$ 与椭圆交于 P，Q 两点，l 与直线 AB 交于点 M，且点 P，M 均在第四象限．若 ΔBPM 的面积是 ΔBPQ 面积的 2 倍，求 k 的值．

20.（本题满分 12 分）如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，平面 $AED\perp$ 平面 $ABCD$，$EF//AB$，$AB=2$，$DE=3$，$BC=EF=1$，$AE=\sqrt{6}$，$\angle BAD=60°$，G 为 BC 的中点．

（1）求证：平面 $BED\perp$ 平面 AED；

（2）求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值．



21. （本题满分 12 分）设抛物线Γ的方程为$y^2=2px$，其中常数$p>0$，F是抛物线Γ的焦点.

（1）设A是点F关于顶点O的对称点，P是抛物线Γ上的动点，求$\frac{|PA|}{|PF|}$的最大值；

（2）设$p=2$，l_1，l_2是两条互相垂直，且均经过点F的直线，l_1与抛物线Γ交于点A，B，l_2与抛物线Γ交于点C，D，若点G满足$4\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}$，求点$G$的轨迹方程.

22.（本题满分 12 分）设a，$b\in R$，$|a|\leqslant 1$. 已知函数$f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，$g(x)=e^x f(x)$.

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）已知函数$y=g(x)$和$y=e^x$的图象在公共点$(x_0，y_0)$处有相同的切线，

①求$f(x)$在$x=x_0$处的导数；

②若关于x的不等式$g(x)\leqslant e^x$在区间$[x_0-1，x_0+1]$上恒成立，求b的取值范围.

ACDCB　BCBCB　BC

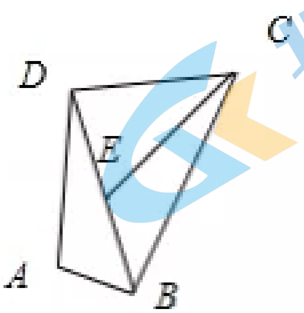
13.　-4　　14.　$\frac{5}{2}$　　15.　$\frac{2\pi}{3}$　　16.　$(e,\frac{3}{2})$

17．解：（1）由题设及余弦定理得：$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C=13-12\cos C$，①

$BD^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot DA\cos A=5+4\cos C$．②由①②得 $\cos C=\frac{1}{2}$，故 $C=60^\circ$．

（2）由 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB})$，得 $\overrightarrow{CE}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB})$．$=\frac{1}{4}(4+9+2\times2\times3\times\frac{1}{2})=\frac{19}{4}$

所以 $CE=\frac{\sqrt{19}}{2}$．



18．解：（1）证明：$\because P-ABC$ 为正三棱锥，且 D 为顶点 P 在平面 ABC 内的正投影，

$\therefore PD\perp$ 平面 ABC，则 $PD\perp AB$，

又 E 为 D 在平面 PAB 内的正投影，$\therefore DE\perp$ 面 PAB，则 $DE\perp AB$，

$\because PD\bigcap DE=D$，$\therefore AB\perp$ 平面 PDE，连接 PE 并延长交 AB 于点 G，

则 $AB\perp PG$，又 $PA=PB$，

$\therefore G$ 是 AB 的中点；

（2）在平面 PAB 内，过点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F，F 即为 E 在平面 PAC 内的正投影．

$\because$ 正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形，

$\therefore PB\perp PA$，$PB\perp PC$，

又 $EF//PB$，所以 $EF\perp PA$，$EF\perp PC$，因此 $EF\perp$ 平面 PAC，

即点 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影．

连结 CG，因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D，所以 D 是正三角形 ABC 的中心．

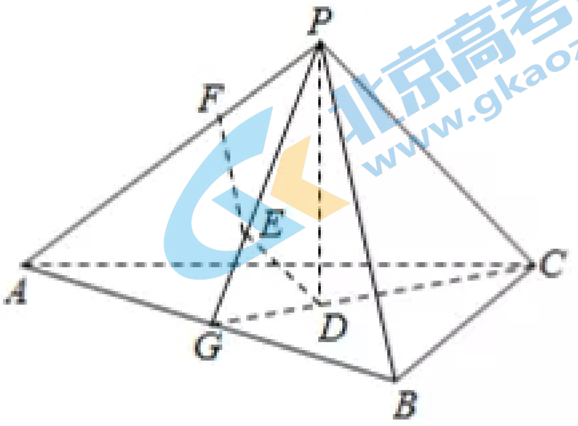
由（Ⅰ）知，G 是 AB 的中点，所以 D 在 CG 上，故 $CD=\frac{2}{3}CG$．

由题设可得 $PC\perp$ 平面 PAB，$DE\perp$ 平面 PAB，所以 $DE//PC$，因此 $PE=\frac{2}{3}PG$，$DE=\frac{1}{3}PC$．

由已知，正三棱锥的侧面是直角三角形且 $PA=6$，可得 $DE=2$，$PG=3\sqrt{2}$，$PE=2\sqrt{2}$．

在等腰直角三角形 EFP 中，可得 $EF=PF=2$．

所以四面体 $PDEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times DE\times S_{\triangle PEF}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$．



19．解：（1）设椭圆的焦距为 $2c$，

由已知可得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，又 $a^2=b^2+c^2$，

解得 $a=3$，$b=2$，

$\therefore$ 椭圆的方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，

（Ⅱ）设点 $P(x_1，y_1)$，$M(x_2，y_2)$，$(x_2>x_1>0)$．则 $Q(-x_1，-y_1)$．

$\because \Delta BPM$ 的面积是 ΔBPQ 面积的 2 倍，$\therefore |PM|=2|PQ|$，从而 $x_2-x_1=2[x_1-(-x_1)]$，

$\therefore x_2=5x_1$，

易知直线 AB 的方程为：$2x+3y=6$．

由$\begin{cases}2x+3y=6\\y=kx\end{cases}$，可得$x_2=\dfrac{6}{3k+2}>0$．

由$\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\y=kx\end{cases}$，可得$x_1=\dfrac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$，

$\Rightarrow\sqrt{9k^2+4}=5(3k+2)$，$\Rightarrow 18k^2+25k+8=0$，解得$k=-\dfrac{8}{9}$或$k=-\dfrac{1}{2}$．

由$x_2=\dfrac{6}{3k+2}>0$．可得$k>-\dfrac{2}{3}$，故$k=-\dfrac{1}{2}$

20．证明：（1）证明：在ΔABD中，$AD=1$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，

由余弦定理可得$BD=\sqrt{3}$，从而$\angle ADB=90°$，即$BD\perp AD$，

又$\because$平面$AED\perp$平面$ABCD$，

$BD\subset$平面$ABCD$，平面$AED\cap$平面$ABCD=AD$，$\therefore BD\perp$平面AED，

$\because BD\subset$平面BED，$\therefore$平面$BED\perp$平面AED．

（2）$\because EF//AB$，

$\therefore$直线EF与平面BED所成的角即为直线AB与平面BED所形成的角，

过点A作$AH\perp DE$于点H，连接BH，

又平面$BED\cap$平面$AED=ED$，

由（1）知$AH\perp$平面BED，

$\therefore$直线AB与平面BED所成的角为$\angle ABH$，

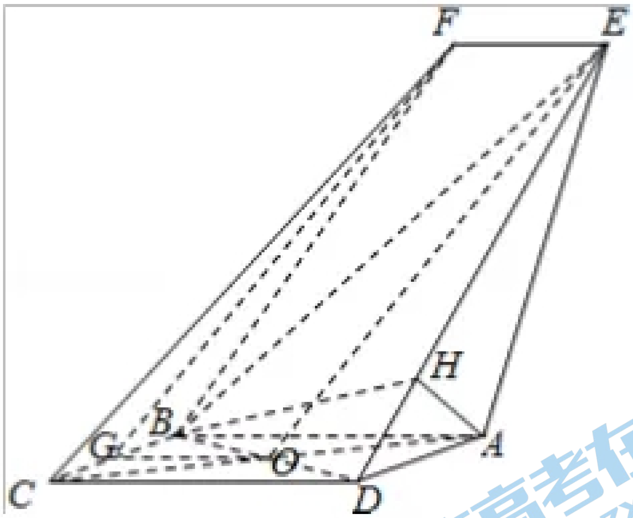
在ΔADE，$AD=1$，$DE=3$，$AE=\sqrt{6}$，由余弦定理得$\cos\angle ADE=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore AH=AD\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

在$\text{Rt}\Delta\text{AHB}$中，$\sin\angle ABH=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$，

$\therefore$ 直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$



21．解：（1） A 是点 $F(\dfrac{p}{2}, 0)$ 关于顶点 O 的对称点，可得 $A(-\dfrac{p}{2}, 0)$，

设过 A 的直线为 $y=k(x+\dfrac{p}{2})$， $k=\tan\alpha$，

联立抛物线方程可得 $k^2x^2+(k^2p-2p)x+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$，

由直线和抛物线相切可得 $\triangle=(k^2p-2p)^2-k^4p^2=0$，解得 $k=\pm 1$，

可取 $k=1$，可得切线的倾斜角为 $45°$，

由抛物线的定义可得 $\dfrac{|PA|}{|PF|}=\dfrac{1}{\sin(90°-\alpha)}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，而 α 的最小值为 $45°$，

$\dfrac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；

（2）由 $y^2=4x$，可得 $F(1,0)$，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$，$G(x,y)$，

设 $l_1: y=k(x-1)$，联立抛物线 $y^2=4x$，可得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

即有 $x_1+x_2=2+\dfrac{4}{k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\dfrac{4}{k}$，

由两直线垂直的条件，可将 k 换为 $-\dfrac{1}{k}$，可得

$x_3+x_4=2+4k^2$， $y_3+y_4=-4k$，

点 G 满足 $4\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}$，

可得 $4(x，\ y)=(x_1+x_2+x_3+x_4-4，\ y_1+y_2+y_3+y_4)$，

即为 $4x=x_1+x_2+x_3+x_4-4=4k^2+\dfrac{4}{k^2}$，

$4y=y_1+y_2+y_3+y_4=-4k+\dfrac{4}{k}$，

可得 $y^2=(k-\dfrac{1}{k})^2=k^2+\dfrac{1}{k^2}-2=x-2$，

则 G 的轨迹方程为 $y^2=x-2$．

22（1）解：由 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，

可得 $f'(x)=3x^2-12x-3a(a-4)=3(x-a)(x-(4-a))$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，或 $x=4-a$．由 $|a|\leqslant 1$，得 $a<4-a$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,a)$	$(a,4-a)$	$(4-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$，$(4-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,4-a)$；

（2）(i) $\because g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$，由题意知 $\begin{cases}g(x_0)=e^{x_0}\\ g'(x_0)=e^{x_0}\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}f(x_0)e^{x_0}=e^{x_0}\\ e^{x_0}(f(x_0)+f'(x_0))=e^{x_0}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}f(x_0)=1\\ f'(x_0)=0\end{cases}$．

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0；

(ii) 解：$\because g(x)\leqslant e^x$，$x\in[x_0-1，\ x_0+1]$，由 $e^x>0$，可得 $f(x)\leqslant 1$．

又$\because f(x_0)=1$， $f'(x_0)=0$，

故x_0为$f(x)$的极大值点，由(I)知$x_0=a$．

另一方面，由于$|a|\leqslant 1$，故$a+1<4-a$，

由（Ⅰ）知$f(x)$在$(a-1,a)$内单调递增，在$(a,a+1)$内单调递减，

故当$x_0=a$时，$f(x)\leqslant f$（a）$=1$在$[a-1$，$a+1]$上恒成立，

从而$g(x)\leqslant e^x$在$[x_0-1$，$x_0+1]$上恒成立．

由f（a）$=a^3-6a^2-3a(a-4)a+b=1$，得$b=2a^3-6a^2+1$，$-1\leqslant a\leqslant 1$．

令$t(x)=2x^3-6x^2+1$，$x\in[-1$，$1]$，

$\therefore t'(x)=6x^2-12x$，

令$t'(x)=0$，解得$x=2$（舍去），或$x=0$．

$\because t(-1)=-7$，t（1）$=-3$，$t(0)=1$，故$t(x)$的值域为$[-7$，$1]$．

$\therefore b$的取值范围是$[-7$，$1]$．