

# 清华大学2021~2022学年TACA综合测试试题

2021年9月4日

## 重要提示:

1. 每道题的答案均为正整数.
2. 若实数满足  $n \leq a < n+1$ , 其中  $n$  为整数, 则取整  $[a] = n$ .
3.  $\det A$  表示方阵  $A$  的行列式,  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置.
4.  $\text{Id}$  表示单位方阵.
5.  $Z$  表示全体整数,  $C$  表示全体复数
6.  $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$  表示  $f$  阶导数.
7.  $y = \arctan(x)$  表示函数  $x = \tan(y)$  的反函数
8. 已知下列近似值  
 $e \approx 2.7182818$ ,  $\pi \approx 3.1415927$ ,  $\log_{10} 2 \approx 0.301030$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0.477121$ ,  
 $\log_{10} 5 \approx 0.698970$ ,  $\log_{10} 7 \approx 0.845098$

填空题：共15题，每题10分，满分150分。

1.  $\sum_{k=0}^8 (-1)^k \binom{8}{k} k^8$  的值为\_\_\_\_\_.

2. 在模 2520 的同余系里，满足方程  $a^2 \equiv a \pmod{2520}$  的元素  $a$  的个数为\_\_\_\_\_.

3. 考虑如下的递归序列  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = -6a_{n-1} - a_{n-2} - 8$ ,  $n \geq 2$ , 那么  $[a_9] =$ \_\_\_\_\_.

4. 已知实数  $x$  和  $y$  满足  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x - 8y = -3$ . 记  $x + y - x^2 - y^2$  的最大值为  $I$ , 则  $[100I] =$ \_\_\_\_\_.

5.  $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(2n-k)(2n+k)}$ , 则  $[100I] =$ \_\_\_\_\_.

6.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cos t)^2} dt$ , 则  $[10I] =$ \_\_\_\_\_.

7.  $I = \int_1^9 \sqrt{(x-1)(9-x)} dt$ , 则  $[I] =$ \_\_\_\_\_.

8. 已知  $f(x) = e^{\sin x^2}$ , 则  $[-f^{(8)}(0)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 求  $[100 \arctan 0.5]$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 考虑如下  $2021 \times 2021$  的方阵  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 2021 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 2021 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2021 \end{pmatrix}$ , 这里  $M$  的行通过依

次地将行向量  $(1, 2, 3, \dots, 2020, 2021)$  的某个位置替换为 0 得到, 则  $\left[ \frac{1}{2020!} \det M \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 令  $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ . 令  $M = A - A^2 + A^3 - A^4 + \cdots + (-1)^{n-1} A^n + \cdots$ , 则

$[2021 \det M] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 如果实数  $k$  使得关于  $x, y, z$  的线性方程组 
$$\begin{cases} kx + y + 2z = 1 \\ 3x + ky + 4z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$
 无解, 则称其是一个“好

实数”. 设所有好实数之和为  $I$ , 则  $[I] =$  \_\_\_\_\_.

13. 设  $A$  是一个  $2022 \times 2000$  矩阵, 如果关于  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2000})^T$  的线性方程组  $Ax = 0$  的解空间维数等于 10, 则关于  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2022})^T$  的线性方程组  $A^T y = 0$  的解空间维度是 \_\_\_\_\_.

14. 记  $S_3$  为 3 个元素的置换群, 则群  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  到  $S_3$  的群同态的个数为 \_\_\_\_\_.

15. 设  $A$  是一个  $2 \times 2$  的可逆矩阵, 且方阵中每个位置的元素在模 3 同余系  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  中取值. 那么满足  $A^{50} \equiv I_2 \pmod{3}$  方阵  $A$  的个数为 \_\_\_\_\_.



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: [bjgkzx](https://www.gkaozx.com)

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: [gaokzx2018](https://www.gkaozx.com)