2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数　学

本试卷共 7 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|-1<x<2\}$　　（B）$\{x|-1<x\leqslant 2\}$

（C）$\{x|0\leqslant x<1\}$　　（D）$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

（2）若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则 $z=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（3）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则“$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增”是“$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

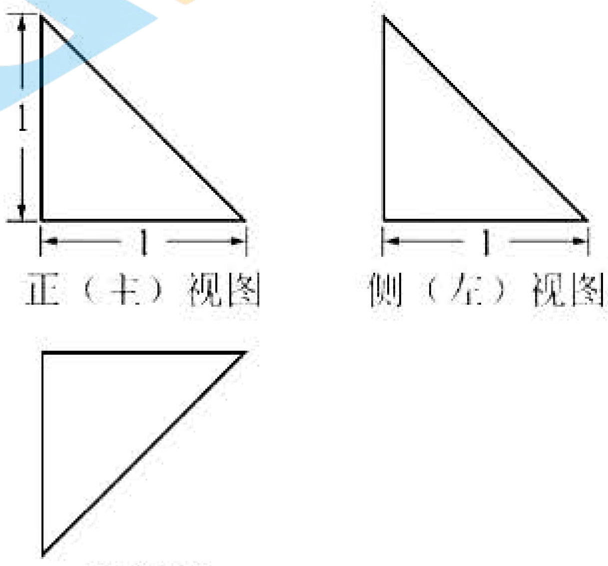
（4）某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为

（A）$\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（B）$3+\sqrt{3}$

（C）$\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

（D）$3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



（5）若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为2，且过点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$，则双曲线的方程为

（A）$2x^2-y^2=1$　　（B）$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

（C）$5x^2-3y^2=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}=1$

（6）《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种．这五种规格党旗的长 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5（单位：cm）成等差数列，对应的宽为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5（单位：cm），且长与宽之比都相等．已知 $a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则 $b_3=$

（A）64　　（B）96

（C）128　　（D）160

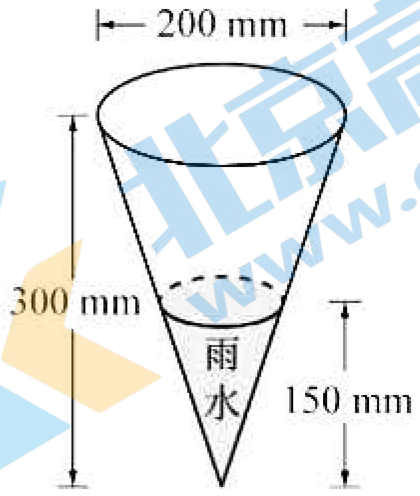
（7）函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$ 是

（A）奇函数，且最大值为2　　（B）偶函数，且最大值为2

（C）奇函数，且最大值为 $\dfrac{9}{8}$　　（D）偶函数，且最大值为 $\dfrac{9}{8}$

（8）某一时段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗漏、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量（单位：mm）．24 h 降雨量的等级划分如下：

等级	24 h 降雨量（精确到0.1）
……	……
小雨	0.1～9.9
中雨	10.0～24.9
大雨	25.0～49.9
暴雨	50.0～99.9
……	……



在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为200 mm，高为300 mm 的圆锥形雨量器．若一次降雨过程中，该雨量器收集的24 h 的雨水高度是150 mm（如图所示），则这24 h 降雨量的等级是

（A）小雨　　（B）中雨

（C）大雨　　（D）暴雨

（9）已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于点 M,N．当 k 变化时，若 $|MN|$ 的最小值为2，则 $m=$

（A）± 1　　（B）$\pm\sqrt{2}$

（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）± 2

（10）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为整数的递增数列，且 $a_1\geqslant 3$．若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则 n 的最大值为

（A）9　　（B）10

（C）11　　（D）12

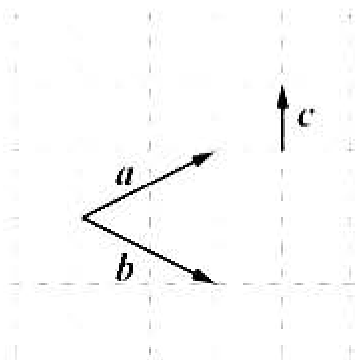
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(x^3-\frac{1}{x})^4$ 的展开式中，常数项为________.（用数字作答）

（12）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线上，MN 垂直 x 轴于点 N．若 $|MF|=6$，则点 M 的横坐标为________；$\triangle MNF$ 的面积为________.

（13）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为1，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$________；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.



（14）若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$，则 θ 的一个取值为________.

（15）已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

① 当 $k=0$ 时，$f(x)$ 恰有 2 个零点；

② 存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点；

③ 存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点；

④ 存在正数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$c=2b\cos B$，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上中线的长.

条件①：$c=\sqrt{2}b$；

条件②：$\triangle ABC$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$；

条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

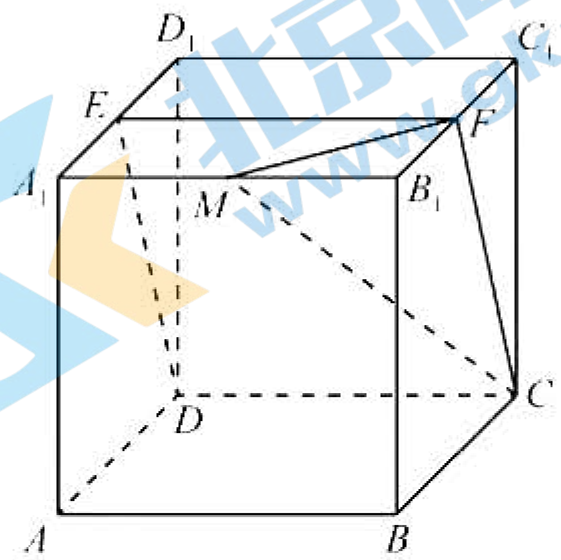
注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 A_1D_1 的中点，B_1C_1 与平面 CDE 交于点 F.

（Ⅰ）求证：F 为 B_1C_1 的中点；

（Ⅱ）若 M 是棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-FC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.



（18）（本小题 13 分）

在核酸检测中，"k 合1"混采核酸检测是指：先将 k 个人的样本混合在一起进行1次检测，如果这 k 个人都没有感染新冠病毒，则检测结果为阴性，得到每人的检测结果都为阴性，检测结束；如果这 k 个人中有人感染新冠病毒，则检测结果为阳性，此时需对每人再进行1次检测，得到每人的检测结果，检测结束.

现对100 人进行核酸检测，假设其中只有 2 人感染新冠病毒，并假设每次检测结果准确.

（Ⅰ）将这100 人随机分成10组，每组10人，且对每组都采用"10 合1"混采核酸检测.

（ⅰ）如果感染新冠病毒的2 人在同一组，求检测的总次数；

（ⅱ）已知感染新冠病毒的2 人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$. 设 X 是检测的总次数，求 X 的分布列与数学期望 EX .

（Ⅱ）将这100 人随机分成20组，每组5人，且对每组都采用"5合1"混采核酸检测. 设 Y 是检测的总次数，试判断数学期望 EY 与（Ⅰ）中 EX 的大小.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间，并求其最大值与最小值.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-2)$，以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(0,-3)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与直线 $y=-3$ 交于点 M,N . 当 $|PM|+|PN|\leq 15$ 时，求 k 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

设 p 为实数．若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下三个性质，则称 $\{a_n\}$ 为 $\Re_p$ 数列：

① $a_1+p\geq 0$，且 $a_2+p=0$；

② $a_{4n-1}<a_{4n}$ $(n=1,2,\cdots)$；

③ $a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p,\ a_m+a_n+p+1\}$ $(m=1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots)$．

（Ⅰ）如果数列 $\{a_n\}$ 的前四项为 2，-2，-2，-1，那么 $\{a_n\}$ 是否可能为 $\Re_2$ 数列？说明理由；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 是 $\Re_0$ 数列，求 a_5；

（Ⅲ）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．是否存在 $\Re_p$ 数列 $\{a_n\}$，使得 $S_n\geq S_{10}$ 恒成立？如果存在，求出所有的 p；如果不存在，说明理由．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学参考答案

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）B	（2）D	（3）A	（4）A	（5）B
（6）C	（7）D	（8）B	（9）C	（10）C

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）-4　　　　（12）5　$4\sqrt{5}$

（13）0　3　　　　（14）$\dfrac{5\pi}{12}$（答案不唯一）

（15）①②④

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（共13分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 及 $c=2b\cos B$，得 $\sin C=2\sin B\cos B$．

因为 $\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\sin 2B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

又因为 $0<\angle B<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{6}$．

（Ⅱ）选条件②：$\triangle ABC$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$．

由（Ⅰ）知，$\angle A=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$．

所以 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，底角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的等腰三角形．

所以 $a=b, c=\sqrt{3}a$．

由题设，$(2+\sqrt{3})a=4+2\sqrt{3}$，所以 $a=2$．

设 BC 边上中线的长为 d．

由余弦定理得 $d^2=(\dfrac{a}{2})^2+a^2-2\times\dfrac{a}{2}\times a\cos C$．

所以 $d^2=1+4-2\times1\times2\times(-\frac{1}{2})$.

故 $d=\sqrt{7}$.

选条件③：$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

由（Ⅰ）知，$\angle A=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

所以 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$，底角为 $\frac{\pi}{6}$ 的等腰三角形.

所以 $a=b$.

由题设，$\frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 所以 $a=\sqrt{3}$.

设 BC 边上中线的长为 d.

由余弦定理得 $d^2=(\frac{a}{2})^2+a^2-2\times\frac{a}{2}\times a\cos C$.

所以 $d^2=\frac{3}{4}+3-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times(-\frac{1}{2})$.

故 $d=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $CD\,/\!/\,C_1D_1$，且 $CD\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CD\,/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.

因为平面 $CDE\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=EF$，所以 $CD\,/\!/\,EF$.

所以 $C_1D_1\,/\!/\,EF$.

因为 E 为 A_1D_1 的中点，所以 F 为 B_1C_1 的中点.

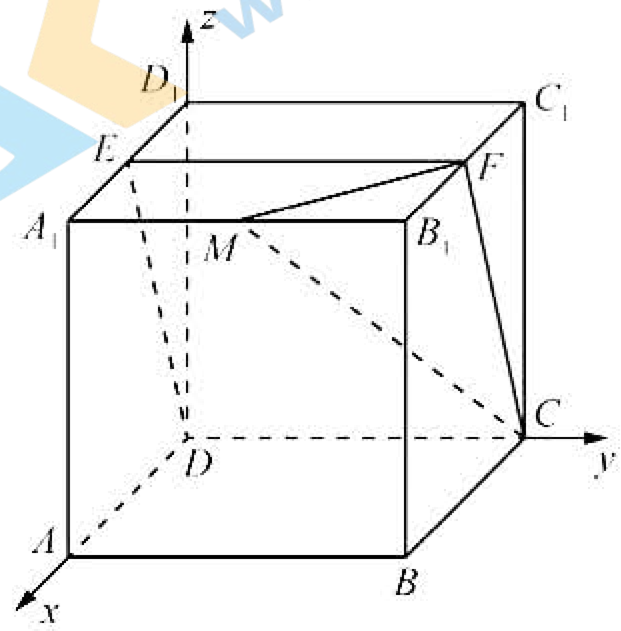
（Ⅱ）不妨设正方体的棱长为 2.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $D(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$F(1,2,2)$.

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CF}=(1,0,2)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则



$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}2y_1=0,\\ x_1+2z_1=0.\end{cases}$$

令 $z_1=1$，则 $x_1=-2$，$y_1=0$．

于是 $\boldsymbol{m}=(-2,0,1)$．

由题设，存在 $\lambda\in[0,1)$，使得 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$．

所以 $M(2,2\lambda,2)$．

所以 $\overrightarrow{FM}=(1,2\lambda-2,0)$．

设平面 MFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_2+(2\lambda-2)y_2=0,\\ x_2+2z_2=0.\end{cases}$$

令 $x_2=2$，则 $z_2=-1$，$y_2=\dfrac{1}{1-\lambda}$．

于是 $\boldsymbol{n}=(2,\dfrac{1}{1-\lambda},-1)$．

由题设，$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{5+\dfrac{1}{(1-\lambda)^2}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$．

所以 $\dfrac{A_1M}{A_1B_1}=\dfrac{1}{2}$．

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）依题意，如果感染新冠病毒的 2 人在同一组，则该组需要检测 11 次，

其他 9 个组都只需要检测 1 次，所以检测总次数为 20．

（ⅱ）由（ⅰ）知，当感染新冠病毒的 2 人分在同一组时，检测的总次数是 20．

当感染新冠病毒的 2 人分在不同组时，可以求得检测的总次数是 30．

所以随机变量 X 的可能取值为 20, 30．

因为感染新冠病毒的2人分在同一组的概率为$\frac{1}{11}$，

所以感染新冠病毒的2人分在不同组的概率为$1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$.

所以随机变量X的分布列为：

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

故随机变量X的数学期望$EX=20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{10}{11}=\frac{320}{11}$.

（Ⅱ）$EY>EX$.

（19）（共15分）

解：（Ⅰ）当$a=0$时，$f(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}$，$f'(x)=-\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^2}$.

所以$f(1)=1$，$f'(1)=-4$.

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=-4(x-1)$，

即$y=-4x+5$.

（Ⅱ）由$f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$得$f'(x)=\frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2}=\frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$.

由题意知$f'(-1)=0$，所以$(-1)^2-3\times(-1)-a=0$，故$a=4$.

当$a=4$时，$f(x)=\frac{3-2x}{x^2+4}$，$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x)$与$f(x)$的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

因此，$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$和$(4,+\infty)$，单调递减区间是$(-1,4)$.

所以$f(x)$在区间$(-\infty,4]$上的最大值是$f(-1)=1$.

又因为当$x\in(4,+\infty)$时，$f(x)<0$，所以$f(-1)=1$是$f(x)$的最大值.

同理可知，$f(4)=-\frac{1}{4}$是$f(x)$的最小值.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$b=2$，$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=4\sqrt{5}$．所以 $a=\sqrt{5}$．

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$．

（Ⅱ）直线 BC 的方程为 $y=kx-3$．

由 $\begin{cases} y=kx-3, \\ 4x^2+5y^2=20 \end{cases}$ 得 $(5k^2+4)x^2-30kx+25=0$．

由 $\Delta=(-30k)^2-4\times(5k^2+4)\times 25=400(k^2-1)>0$，得 $|k|>1$．

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{30k}{5k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{25}{5k^2+4}$．

直线 AB 的方程为 $y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$．

令 $y=-3$，得点 M 的横坐标为 $x_M=-\frac{x_1}{y_1+2}=-\frac{x_1}{kx_1-1}$．

同理可得点 N 的横坐标为 $x_N=-\frac{x_2}{y_2+2}=-\frac{x_2}{kx_2-1}$．

由题设，$y_1+2>0$，$y_2+2>0$，$x_1x_2>0$，所以 $x_Mx_N=\frac{x_1x_2}{(y_1+2)(y_2+2)}>0$．

所以 x_M,x_N 同号．

所以 $|PM|+|PN|=|x_M+x_N|$

$$=\left|\frac{x_1}{kx_1-1}+\frac{x_2}{kx_2-1}\right|$$

$$=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2-k(x_1+x_2)+1}\right|$$

$$=\left|\frac{2k\times\frac{25}{5k^2+4}-\frac{30k}{5k^2+4}}{k^2\times\frac{25}{5k^2+4}-k\times\frac{30k}{5k^2+4}+1}\right|$$

$$=5|k|.$$

由题设，$5|k|\leqslant 15$．

所以 $1<|k|\leqslant 3$．

所以 k 的取值范围是 $[-3,-1)\cup(1,3]$．

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)数列 $\{a_n\}$ 不可能为 $\Re_2$ 数列. 理由如下:

因为 $p=2$, $a_1=2$, $a_2=-2$, 所以 $a_1+a_2+p=2$, $a_1+a_2+p+1=3$.

因为 $a_3=-2$, 所以 $a_3\notin\{a_1+a_2+p,\ a_1+a_2+p+1\}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 不满足性质③.

(Ⅱ)根据 $\Re_0$ 数列的定义, 可知 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1\geqslant 0,\ a_2=0$; $a_{4n-1}<a_{4n}$; $a_{m+n}=a_m+a_n$ 或 $a_{m+n}=a_m+a_n+1$.

由 $a_{n+1}=a_n+a_1$ 或 $a_{n+1}=a_n+a_1+1$, 以及 $a_1\geqslant 0$, 可知 $a_{n+1}\geqslant a_n$.

所以 $a_1=0$.

由 $a_3=a_1+a_2=0$ 或 $a_3=a_1+a_2+1=1$; $a_4=a_2+a_2=0$ 或 $a_4=a_2+a_2+1=1$,

以及 $a_3<a_4$, 可知 $a_3=0,\ a_4=1$.

由 $a_5=a_2+a_3=0$ 或 $a_5=a_2+a_3+1=1$,

以及 $a_5\geqslant a_4$, 可知 $a_5=1$.

(Ⅲ)假设数列 $\{a_n\}$ 是满足"$S_n\geqslant S_{10}$ 恒成立"的 $\Re_p$ 数列.

因为 $a_{n+1}=a_n+a_1+p$ 或 $a_{n+1}=a_n+a_1+p+1$, 且 $a_1+p\geqslant 0$, 所以 $a_{n+1}\geqslant a_n$.

由 $-p\leqslant a_1\leqslant a_2=-p$, 可知 $a_1=-p$.

从而 $a_{4n}=a_{4n-1}+a_1+p=a_{4n-1}$ 或 $a_{4n}=a_{4n-1}+a_1+p+1=a_{4n-1}+1$.

又因为 $a_{4n-1}<a_{4n}$, 所以 $a_{4n}=a_{4n-1}+1$.

因为 $a_4=a_3+1$, 且 $a_3\geqslant a_2=-p$, 所以 $a_4\geqslant -p+1$.

又因为 $a_4\leqslant a_2+a_2+p+1=-p+1$, 所以 $a_4=-p+1$, $a_3=-p$.

因为 $a_{12}\leqslant a_6+a_6+p+1$, 且 $a_6\leqslant a_3+a_3+p+1=-p+1$, 所以 $a_{12}\leqslant -p+3$.

因为 $a_{11}=a_{12}-1$, 所以 $a_{11}\leqslant -p+2$.

由 $S_{11}\geqslant S_{10}$ 可知 $a_{11}\geqslant 0$, 所以 $p\leqslant 2$.

由 $a_{10}\geqslant a_8=a_7+1$ 及 $a_7\geqslant a_4=-p+1$, 可知 $a_{10}\geqslant -p+2$.

由 $S_9\geqslant S_{10}$ 可知 $a_{10}\leqslant 0$, 所以 $p\geqslant 2$.

综上可知, 若数列 $\{a_n\}$ 是满足"$S_n\geqslant S_{10}$ 恒成立"的 $\Re_p$ 数列, 则 $p=2$.

当 $p=2$ 时，考虑数列 $\{a_n\}$：

$$a_n=\begin{cases}-2+k, & n\in\{4k+1,4k+2,4k+3\},\\ -1+k, & n=4k+4\end{cases}\quad (k\in\mathbf{N}).$$

下面验证数列 $\{a_n\}$ 满足性质① ② ③.

由 $a_1=-2$、$a_2=-2$ 可知 $a_1+p\geqslant 0$，$a_2+p=0$.

因为 $a_{4n-1}=n-3$，$a_{4n}=n-2$，所以 $a_{4n-1}<a_{4n}$.

对于任意正整数 m,n，存在 $k_1,k_2\in\mathbf{N}$，$r_1,r_2\in\{0,1,2,3\}$，使得

$m=4k_1+r_1$，$n=4k_2+r_2$.

所以 $a_m=-2+k_1$，$a_n=-2+k_2$.

所以 $a_m+a_n+p=-2+k_1+k_2$，$a_m+a_n+p+1=-1+k_1+k_2$.

又 $m+n=4(k_1+k_2)+r_1+r_2$，所以

当 $0\leqslant r_1+r_2<4$ 时，$a_{m+n}=-2+k_1+k_2$；当 $4\leqslant r_1+r_2\leqslant 6$ 时，$a_{m+n}=-1+k_1+k_2$.

所以 $a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p,\ a_m+a_n+p+1\}$.

由通项公式可知，当 $n\leqslant 9$ 时，$a_n\leqslant a_{10}=0$；当 $n\geqslant 11$ 时，$a_n\geqslant a_{10}=0$.

所以 $S_n\geqslant S_{10}$ 恒成立.

综上，存在 $\Re_p$ 数列 $\{a_n\}$，使得 $S_n\geqslant S_{10}$ 恒成立，这时 $p=2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。