

2023-2024 学年第一学期期末模拟二

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。

1. 已知 $x = 1$ 是方程 $x^2 - 2x + c = 0$ 的一个根，则实数 c 的值是()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2. 下列有关天气的图标中，是中心对称图形的是()



3. 如图， $\odot O$ 的半径为 5，弦 $AB = 8$ ，点 C 是 AB 的中点，连接 OC ，则 OC 的长为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 一个不透明的盒子中装有 4 个形状、大小质地完全相同的小球，这些小球上分别标有数字 -1 、 0 、 2 和 3 。从中随机地摸取一个小球，则这个小球所标数字是正数的概率为()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 已知二次函数 $y = x^2 - 1$ ，如果 y 随 x 的增大而减小，那么 x 的取值范围是()

- A. $x \geq 1$ B. $x \leq 1$ C. $x \geq 0$ D. $x \leq 0$

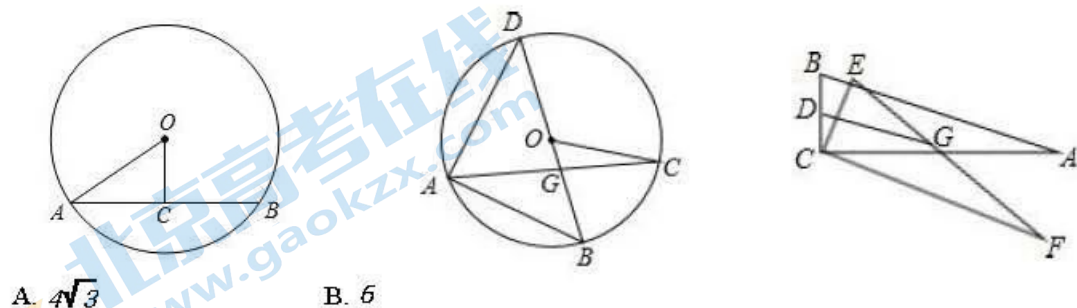
6. 已知 $\odot O$ 的半径是 8，点 P 到圆心 O 的距离 d 为方程 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的一个根，则点 P 在()

- A. $\odot O$ 的内部 B. $\odot O$ 的外部
C. $\odot O$ 上或 $\odot O$ 的内部 D. $\odot O$ 上或 $\odot O$ 的外部

7. 如图， BD 是 $\odot O$ 的直径，点 A 、 C 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ ， AC 交 BD 于点 G 。若 $\angle COD = 126^\circ$ ，则 $\angle AGB$ 的度数为()

- A. 99° B. 108° C. 110° D. 117°

8. 如图，在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 4\sqrt{3}$ ， BC 的中点为 D 。将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转任意一个角度得到 $\triangle FEC$ ， EF 的中点为 G ，连接 DG 。在旋转过程中， DG 的最大值是()



二、填空题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。

9. 函数 $y = x^2 - 5$ 的最小值是_____.

10. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

11. 2022 年 3 月 12 日是我国第 44 个植树节，某林业部门为了考察某种幼树在一定条件下的移植成活率，在同等条件下，对这种幼树进行大量移植，并统计成活情况，下表是这种幼树移植过程中的一组统计数据：

幼树移植数(棵)	100	1000	5000	8000	10000	15000	20000
幼树移植成活数(棵)	87	893	4485	7224	8983	13443	18044
幼树移植成活的频率	0.870	0.893	0.897	0.903	0.898	0.896	0.902

估计该种幼树在此条件下移植成活的概率是_____. (结果精确到 0.1)

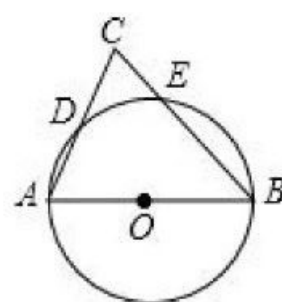
12. 在数学课上，老师提出如下问题：

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 外， AC ， BC 分别与 $\odot O$ 交于点 D ， E ，请你作出 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高.

小文说：连接 AE ，则线段 AE 就是 BC 边上的高.

老师说：“小文的作法正确.”

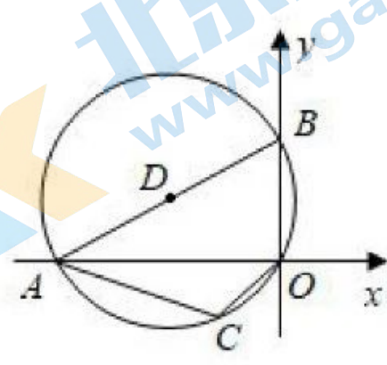
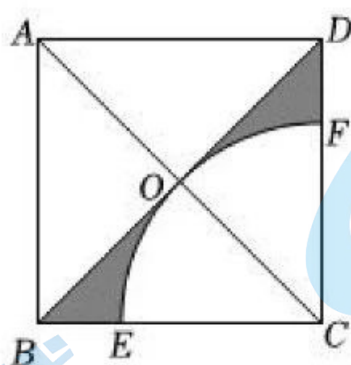
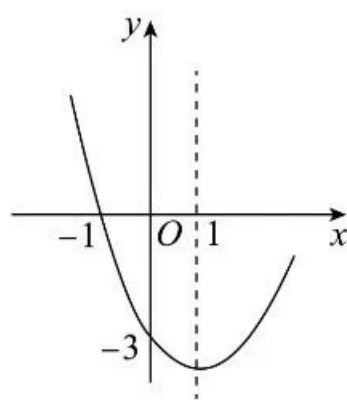
请回答：小文的作图依据是_____.



13. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示，若 $-1 < x < 2$ ，则 y 的取值范围是_____.

14. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，以 C 为圆心， CO 长为半径的弧交 BC 于点 E ，交 CD 于点 F ，则图中阴影部分的面积是_____.

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴负半轴上，点 B 在 y 轴正半轴上， $\odot D$ 经过 A ， B ， O ， C 四点， $\angle ACO = 120^\circ$ ， $AB = 4$ ，则圆心点 D 的坐标是_____.



16. 对于一个函数，如果它的自变量 x 与函数值 y 满足：当 $-1 \leq x \leq 1$ 时， $-1 \leq y \leq 1$ ，则称这个函数为“闭函数”. 例如： $y = x$ ， $y = -x$ 均是“闭函数”. 已知 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 是“闭函数”，且抛物线经过点 $A(1, -1)$ 和点 $B(-1, 1)$ ，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题：本题共 12 小题，共 68 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

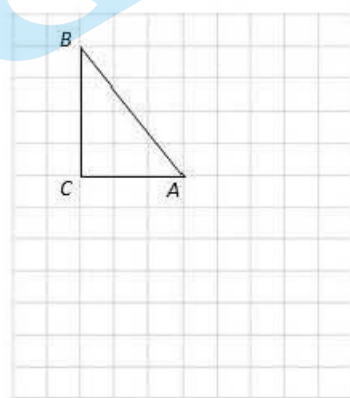
17. (本小题 6 分)

(1) 解方程： $4(x - 1)^2 - 9 = 0$;

(2) 解方程： $x^2 - 6x - 7 = 0$. (配方法)

18.(本小题 5分)在下列的网格图中, 每个小正方形的边长均为 1个单位, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$.

- (1)试在图中作出 $\triangle ABC$ 以 A 为旋转中心, 沿顺时针方向旋转 90° 后的图形 $\triangle AB_1C_1$;
- (2)若点 B 的坐标为 $(-3,5)$, 试在图中画出直角坐标系, 并标出 A 点的坐标;
- (3)根据(2)中的坐标系作出与 $\triangle ABC$ 关于原点对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$, 并标出 B_2 的坐标.



19.(本小题 5分)

已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$.

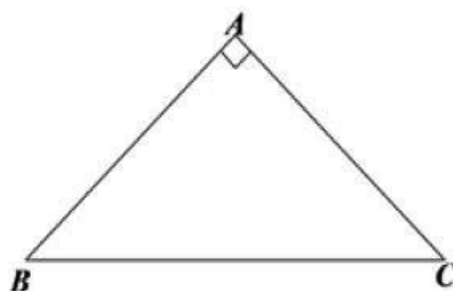
- (1)证明: 不论 m 为何值, 方程总有实数根;
- (2) m 为何整数时, 方程有两个不相等的正整数根?

20.(本小题 5分)

如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$.

- (1)请用圆规和直尺作出 $\odot P$, 使圆心 P 在 AC 边上, 且与 AB , BC 两边都相切(保留作图痕迹, 不写作法和证明);

- (2)在(1)的条件下, 若 $\angle B = 45^\circ$, $AB = 1$, $\odot P$ 切 BC 于点 D , 求劣弧 $\widehat{AD}$ 的长.



21.(本小题 5 分)

定义：若两个三角形有一对公共边，且另有一组对应边和一对对应角分别对应相等，那么这两个三角形称为邻等三角形。

例如：如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AD = AD$ ， $AB = AC$ ， $\angle B = \angle C$ ，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 是邻等三角形。

(1)如图 2， $\odot O$ 中，点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，那么请判断 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 是否为邻等三角形，并说明理由。

(2)如图 3，以点 $A(2,2)$ 为圆心， OA 为半径的 $\odot A$ 交 x 轴于点 $B(4,0)$ ， $\triangle OBC$ 是 $\odot A$ 的内接三角形， $\angle COB = 30^\circ$ ，求 $\angle C$ 的度数和 OC 的长；

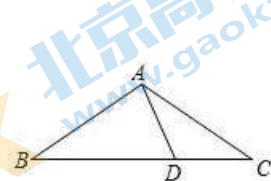


图1

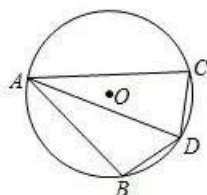


图2

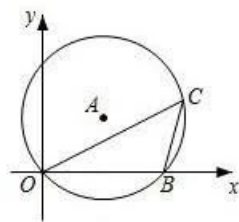


图3

22.(本小题 5 分)

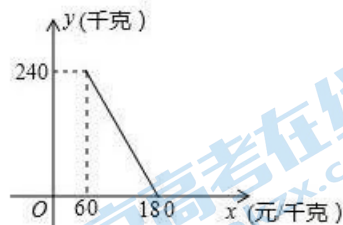
甲、乙两名同学玩一个游戏：在一个不透明的口袋中装有标号分别为 1, 2, 3, 4 的四个小球(除标号外无其它差异)从口袋中随机摸出一个小球，记下标号后放回口袋中，充分摇匀后，再从口袋中随机摸出一个小球，记下该小球的标号，两次记下的标号分别用 x 、 y 表示。若 $x + y$ 为奇数，则甲获胜；若 $x + y$ 为偶数，则乙获胜。

(1)用列表法或树状图法中的一种方法，求 (x, y) 所有可能出现的结果总数；

(2)你认为这个游戏对双方公平吗？请说明理由。

23. (本小题 6 分)

某商店以 60 元/千克的单价新进一批商品，经调查发现，在一段时间内，销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 之间的函数关系式如图所示.

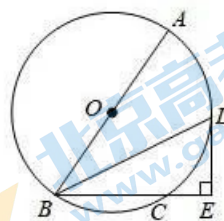


- (1) 根据图象求出 y 与 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；
- (2) 当销售单价应定为多少元时，商店获得利润达到 5400 元？
- (3) 当销售单价应定为多少元时，商店获得利润最大？最大利润是多少？

24. (本小题 6 分)

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BD 平分 $\angle ABC$ ， $DE \perp BC$.

- (1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 $CE = 2$ ， $DE = 4$ ，求 $\odot O$ 的半径.



25. (本小题 5 分)

学校新建的体育器材室的一面外墙如图 1 所示，它的轮廓由抛物线和矩形 $ABCD$ 构成. 数学兴趣小组要为器材室设计一个矩形标牌 $EFGH$ ，要求矩形 $EFGH$ 的顶点 E ， H 在抛物线上，顶点 F ， G 在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上. 为了设计面积最大的矩形 $EFGH$ ，兴趣小组对矩形 $EFGH$ 的面积与它的一边 FG 的长之间的关系进行研究.

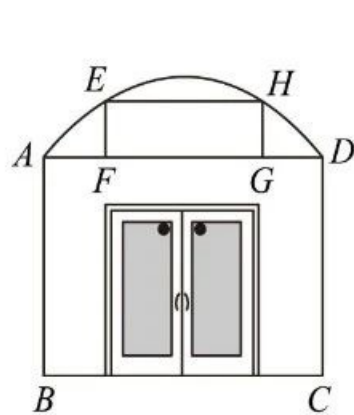


图1

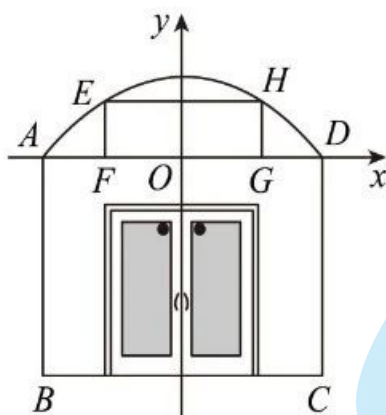


图2

具体研究过程如下，请补充完整.

(1)建立模型:

以 FG 的中点为坐标原点，建立如图2所示的平面直角坐标系 xOy ，通过研究发现，抛物线满足函数关系 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 (-2 \leq x \leq 2)$. 设矩形 $EFGH$ 的面积为 $S m^2$ ， FG 的长为 $a m$ ，

则另一边 HG 的长为_____ m (用含 a 的代数式表示)，得到 S 与 a 的关系式为:

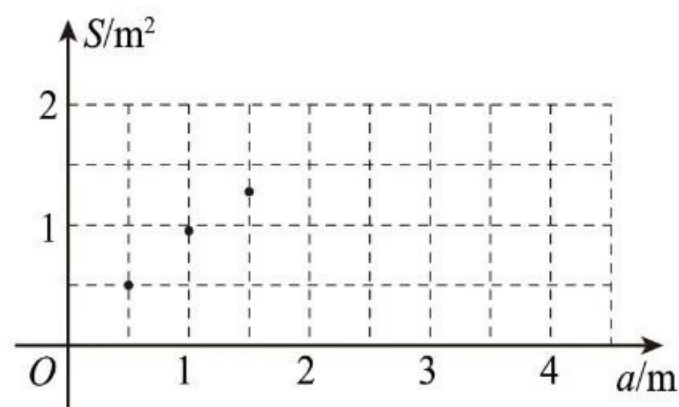
_____ ($0 < a < 4$);

(2)探究函数:

列出 S 与 a 的几组对应值:

a/m	...	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	...
S/m^2	...	0.49	0.94	1.29	1.50	1.52	1.31	0.82	...

在下面的平面直角坐标系中，描出表中各组数值对应的点，并画出该函数的图象:



(3)解决问题: 结合函数图象得到， FG 的长约为_____ m 时，矩形面积最大.

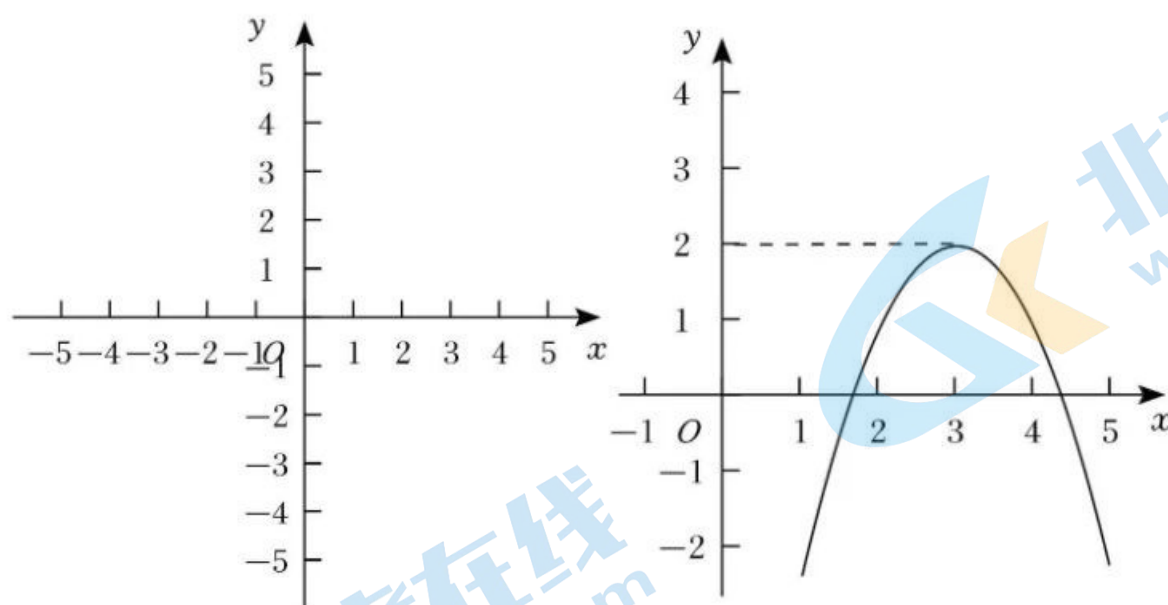
26. (本小题 6 分)

对某一个函数给出如下定义: 如果存在实数 M ，对于任意的函数值 y ，都满足 $y \leq M$ ，那么称这个函数是有上界函数. 在所有满足条件的 M 中，其最小值称为这个函数的上确界. 例如，图中的函数 $y = -(x-3)^2 + 2$ 是有上界函数，其上确界是 2.

(1)函数① $y = x^2 + 2x + 1$ 和② $y = 2x - 3 (x \leq 2)$ 中是有上界函数的为_____ (只填序号即可)，其上确界为_____;

(2)如果函数 $y = -x + 2 (a \leq x \leq b, b > a)$ 的上确界是 b ，且这个函数的最小值不超过 $2a + 1$ ，求 a 的取值范围;

(3)如果函数 $y = x^2 - 2ax + 2 (1 \leq x \leq 5)$ 是以 3 为上确界的有上界函数，求实数 a 的值.



27. (本小题 7 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , $AE \perp BC$ 于点 E , 连接 DE .

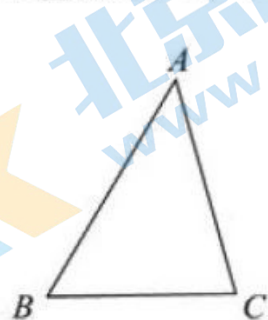


图 1

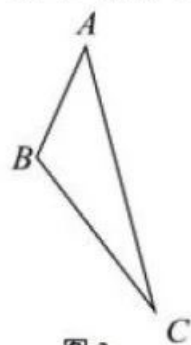


图 2

(1) 如图 1, 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,

① 依题意补全图形, 猜想 $\angle BAE$ 与 $\angle BCD$ 之间的数量关系并证明;

② 用等式表示线段 AE , CE , DE 的数量关系, 并证明;

(2) 如图 2, 当 $\angle ABC$ 为钝角时, 依题意补全图形并直接写出线段 AE , CE , DE 的数量关系.

28. (本小题 7 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 $\odot T$ 外一点 P 引它的两条切线, 切点分别为 M, N , 若 $60^\circ \leq \angle MPN < 180^\circ$, 则称 P 为 $\odot T$ 的环绕点.

(1) 当 $\odot O$ 半径为 2 时,

(i) 在 $P_1(2,0), P_2(2,2), P_3(0,4)$ 中, $\odot O$ 的环绕点是_____;

(ii) 直线 $y = 2x + b$ 与 x 轴交于点 A , y 轴交于点 B , 若线段 AB 上存在 $\odot O$ 的环绕点, 求 b 的取值范围;

(2) $\odot T$ 的半径为 $\sqrt{3}$, 圆心为 $(0, t)$, 以 $(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m) (m > 0)$ 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{3}m$ 为半径的所有圆构成图形 H , 若在图形 H 上存在 $\odot T$ 的环绕点, 直接写出 t 的取值范围.

