北京市中关村中学高三年级 9 月开学考试数学试题

本试卷共 4 页，150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 设全集$U=\{x\in R|x\geq 1\}$，集合$A=\{x\in R^{+}|x^{2}\geq 3\}$，则$\complement_{U}A=$（　　）

A. $\left[1,\sqrt{3}\right)$　　B. $\left[1,\sqrt{3}\right]$

C. $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$　　D. $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】求得集合 $A=\{x\,|\,x\geq\sqrt{3}\}$，结合集合补集的概念及运算，即可求解.

【详解】由题意，集合 $A=\{x\,|\,x\geq\sqrt{3}\}$

又由$U=\{x\in R\,|\,x\geq 1\}$，所以$\complement_{U}A=\{x\,|\,1\leq x<\sqrt{3}\}=[1,\sqrt{3})$.

故选：A.

2. 在复平面内，复数$z=\dfrac{1+2i}{i}$对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可得：$z=2-i$，据此确定复数所在的象限即可.

【详解】由题意可得：$z=\dfrac{1+2i}{i}=\dfrac{i+2i^{2}}{i^{2}}=\dfrac{i-2}{-1}=2-i$，

则复数 z 对应的点为$\left(2,-1\right)$，位于第四象限.

本题选择 D 选项.

【点睛】本题主要考查复数的运算法则，各个象限内复数的特征等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3. 已知向量$\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(3,2)$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $5\sqrt{2}$　　D. 50

【答案】A

【解析】

【分析】本题先计算$\vec{a}-\vec{b}$，再根据模的概念求出$|\vec{a}-\vec{b}|$.

【详解】由已知，$\vec{a}-\vec{b}=(2,3)-(3,2)=(-1,1)$，

所以$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

故选 A

【点睛】本题主要考查平面向量模长的计算，容易题，注重了基础知识、基本计算能力的考查．由于对平面向量的坐标运算存在理解错误，从而导致计算有误；也有可能在计算模的过程中出错．

4. 已知$f(x)=x-\sin x$，命题p：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$，则（　　）

A. p是假命题，$\neg p$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$

B. p是假命题，$\neg p$：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$

C. p是真命题，$\neg p$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$

D. p是真命题，$\neg p$：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$

【答案】A

【解析】

【分析】利用导数判断函数单调性，可判断命题p的真假，根据含有一个量词的命题的否定可得$\neg p$，即得答案.

【详解】因为$f(x)=x-\sin x$，故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)=1-\cos x>0$，

即$f(x)=x-\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，而$f(0)=0$，

故$f(x)>f(0)=0$，即命题p：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$为假命题；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

又命题 p：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$ 为特称命题，

其否定为 $\neg p$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$，

故选：A

5. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点重合，则 p 的值为（　　）

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】求出双曲线的右焦点坐标，根据抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 $(\frac{p}{2},0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点重合可得 $p=4$.

【详解】由双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 得 $a^2=3,b^2=1$，所以 $c^2=a^2+b^2=3+1=4$，$c=2$，

所以双曲线的右焦点为 $(2,0)$，

因为抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 $(\frac{p}{2},0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点重合，

所以 $\frac{p}{2}=2$，所以 $p=4$.

故选：A

6. 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2$ 的值域为 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$，则 a 的值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】利用基本不等式求得当 $x>0$ 和 $x<0$ 时函数值的取值范围，以及题目所给值域列出方程组，解方程组求得 a 的值.

【详解】由题意可得 $a>0$，①当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}+2\geqslant 2\sqrt{a}+2$，当且仅当 $x=\sqrt{a}$ 时取等号；②当 $x<0$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}+2\leqslant -2\sqrt{a}+2$，当且仅当 $x=-\sqrt{a}$ 时取等号．所以 $\begin{cases}2-2\sqrt{a}=0\\ 2\sqrt{a}+2=4\end{cases}$ 解得 $a=1$，故选 C.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【点睛】本小题主要考查利用基本不等式求和式的最值，应用过程中要注意“一正二定三相等”这个基本不等式应用的要点.一正的意思是利用基本不等式的两个数要确保是正数，如本题中当 $x<0$ 时，函数要转化为 $f\left(x\right)=-\left[\left(-x\right)+\dfrac{a}{-x}\right]+2$，才能运用基本不等式求最值.二定的意思是最后的最值是一个常数，三相等的意思是等号成立的条件.

7. 在△ABC中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 所对的边，若 $c^2=(a-b)^2+6$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则△ABC的面积是（　　）

A. 3　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知结合余弦定理得出 ab 的值，即可根据面积公式得出答案.

【详解】$\because c^2=(a-b)^2+6=a^2-2ab+b^2+6$，

即 $a^2+b^2-c^2=2ab-6$，

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2ab-6}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

解得：$ab=6$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

故选：C.

8. 已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=-x^2+2x+1$．若关于 x 的方程，$f\left(x\right)-k=0$ 有三个不同的实数解，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $[-2,-1]\cup[1,2]$　　B. $\left(-2,-1\right)\cup\left(1,2\right)$

C. $\left(-2,-1\right]\cup\{0\}\cup\left[1,2\right)$　　D. $\left(-2,-1\right)\cup\{0\}\cup\left(1,2\right)$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性作出函数图象，将 $f\left(x\right)-k=0$ 有三个不同的实数解转化为函数 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=k$ 有三个不同交点问题，数形结合，即可求得答案.

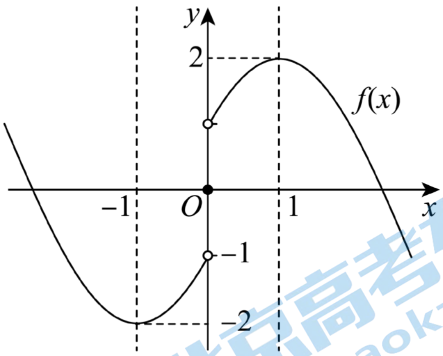
关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【详解】由题意函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，知 $f(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=-x^{2}+2x+1$，

则当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f\left(x\right)=-f(-x)=x^{2}+2x-1$；

作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象如图：



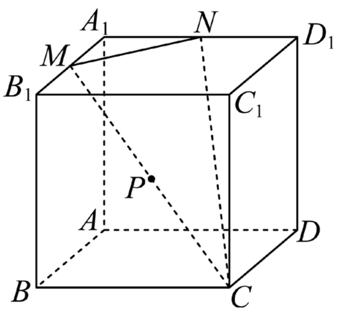
因为关于 x 的方程，$f\left(x\right)-k=0$ 有三个不同的实数解，

即函数 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=k$ 有三个不同交点，

结合图象可知 $k\in\left(-2,-1\right)\cup\left\{0\right\}\cup\left(1,2\right)$，

故选：D

9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，点 E 在 BD 上，点 F 在 B_1C 上，且 $BE=CF$，点 P 在线段 CM 上运动，给出下列四个结论：



①当点 E 是 BD 中点时，直线 EF // 平面 DCC_1D_1；

②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

③存在点 P，使得 $\angle B_1PD_1=90°$；

④$\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

其中所有正确结论的个数是（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】C

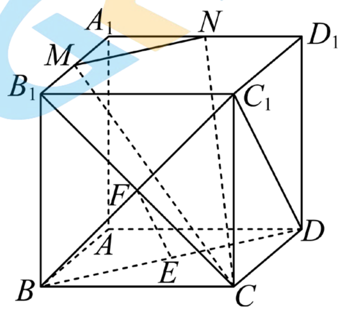
【解析】

【分析】根据线面平行的判定判断①；根据等体积法求得点 D_1 到平面 CMN 的距离即直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离，判断②；建立空间直角坐标系，利用空间向量的数量积运算解决垂直问题，判断③；求出 $\triangle PDD_1$ 面积的表达式，结合二次函数知识求得面积的最小值，判断④，即得答案.

【详解】对于①，点 E 是 BD 中点，$BD=B_1C=2\sqrt{2}$，

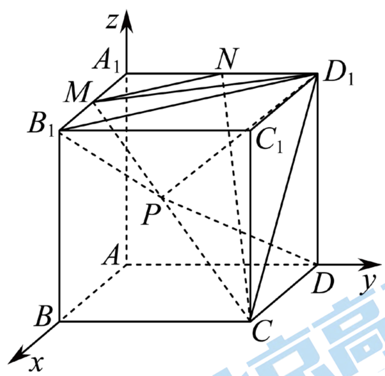
而 $BE=CF$，故 $CF=BE=\sqrt{2}$，即 F 为 B_1C 的中点，

连接 DC_1，则 EF // DC_1，因为 $EF\not\subset$ 平面 DCC_1D_1，$DC_1\subset$ 平面 DCC_1D_1，



故直线 EF // 平面 DCC_1D_1，①正确；

对于②，连接 B_1D_1, M, N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，



故 B_1D_1 // MN，$B_1D_1\not\subset$ 平面 CMN，$MN\subset$ 平面 CMN，

故 B_1D_1 // 平面 CMN，

故直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离等于点 D_1 到平面 CMN 的距离，设为 h；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$MN=\frac{1}{2}B_1D_1=\sqrt{2},CN=CM=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3,V_{C-MND_1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times2=\frac{1}{3}$,

$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，故$V_{D_1-CMN}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times h$，

由于$V_{C-MND_1}=V_{D_1-CMN}$，故$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times h,\therefore h=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，②错误；

对于③，以点A为坐标原点，AB,AD,AA_1为x,y,z轴建立空间直角坐标系，

则$M(1,0,2),C(2,2,0),B_1(2,0,2),D_1(0,2,2)$，

$\overrightarrow{MC}=(1,2,-2)$，设$\overrightarrow{MP}=t\cdot\overrightarrow{MC}=(t,2t,-2t),t\in[0,1]$，

故$P(t+1,2t,-2t+2)$，则$\overrightarrow{PB_1}=(1-t,-2t,2t),\overrightarrow{PD_1}=(-t-1,2-2t,2t)$，

由$\angle B_1PD_1=90^\circ$，得$\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PD_1}=(1-t)(-t-1)+(-2t)(2-2t)+2t\cdot2t=9t^2-4t-1=0$，

解得$t=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}\in[0,1]$，故存在点$P$，使得$\angle B_1PD_1=90^\circ$，③正确；

对于④，由③知$P(t+1,2t,-2t+2)$在DD_1上的投影为$(0,2,-2t+2)$，

故$P(t+1,2t,-2t+2)$到DD_1的距离为$d=\sqrt{(t+1)^2+(2-2t)^2}=\sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$，

则$\triangle PDD_1$的面积为$S=\frac{1}{2}\times2\times d=\sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{5}},t\in[0,1]$，

当$t=\frac{3}{5}\in[0,1]$时，$5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$取得最小值$\frac{16}{5}$，

故$\triangle PDD_1$的面积S取到最小值$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，④错误，

故所有正确结论的个数是2，

故选：C

10. 若函数$f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$在$R$上单调递增，则$a$的取值范围是

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

【答案】C

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【解析】

【详解】试题分析：$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

故 $1-\frac{2}{3}\left(2\cos^2 x-1\right)+a\cos x\geqslant 0$，即 $a\cos x-\frac{4}{3}\cos^2 x+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 恒成立，

即 $-\frac{4}{3}t^2+at+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 对 $t\in[-1,1]$ 恒成立，构造 $f(t)=-\frac{4}{3}t^2+at+\frac{5}{3}$，开口向下的二次函数 $f(t)$ 的最小值的可能值为端点值，故只需保证 $\begin{cases}f(-1)=\frac{1}{3}-a\geqslant 0\\ f(1)=\frac{1}{3}+a\geqslant 0\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$．故选 C.

【考点】三角变换及导数的应用

【名师点睛】本题把导数与三角函数结合在一起进行考查,有所创新,求解的关键是把函数单调性转化为不等式恒成立,再进一步转化为二次函数在闭区间上的最值问题,注意与三角函数值域或最值有关的问题,即注意正、余弦函数的有界性.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 二项式 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是______；二项式系数和是______.

【答案】 ①. -160 ②. 64

【解析】

【分析】根据二项式展开式的通项公式可求得常数项；根据二项式系数和性质可求得二项式系数和.

【详解】由题意得二项式 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot 2^{6-r}C_6^r x^{6-2r},(r=0,1,\cdots,6)$，

令 $6-2r=0,\therefore r=3$，

则二项式 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是 $(-1)^3\cdot 2^{6-3}C_6^3=-160$；

二项式系数和是 $2^6=64$，

故答案为：-160；64.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称，点 $M(x,-1)$ 在

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

角 β 的终边上．若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\beta=$______．

【答案】$-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】由题意知角 α 与角 β 的终边关于原点对称，确定点 $N(-x,1)$ 在角 α 的终边上，根据角的终边上一点的坐标求解三角函数值，即可得答案．

【详解】由题意知角 α 与角 β 的终边关于原点对称，点 $M(x,-1)$ 在角 β 的终边上，

则点 $N(-x,1)$ 在角 α 的终边上，

由 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 以及 $|ON|=\sqrt{x^2+1}$，可得 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{3}$；

由点 $M(x,-1)$ 在角 β 的终边上且 $|OM|=\sqrt{x^2+1}$，

可知 $\sin\beta=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{3}$，

故答案为：$-\frac{1}{3}$

13. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差不为零，其前 n 项和为 S_n，则"$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$S_{n+1}>S_n$"是"$\{a_n\}$ 为递增数列"的______条件（填"充分不必要"，"必要而不充分"，"充要"或"既不充分也不必要"）

【答案】充分不必要

【解析】

【分析】判断"$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$S_{n+1}>S_n$"和"$\{a_n\}$ 为递增数列"之间的逻辑推理关系，即可得答案．

【详解】$\{a_n\}$ 是等差数列，且公差不为零，设其公差为 $d,d\neq 0$，

由 $\forall n\in\mathrm{N}^*$，$S_{n+1}>S_n$ 可知 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0$，

即 $a_1+nd>0$ 对 $\forall n\in\mathrm{N}^*$ 都成立，则必有 $d>0$，

则 $\{a_n\}$ 为递增数列；

若 $\{a_n\}$ 为递增数列，比如等差数列：$-2,-1,0,1,2,\cdots$ 是递增数列，

但 $S_2<S_1$，故"$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$S_{n+1}>S_n$"不成立，

故"$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$S_{n+1}>S_n$"是"$\{a_n\}$ 为递增数列"的充分不必要条件，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故答案为：充分不必要

14. 设函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，满足 $f\left(x+1\right)=2f\left(x\right)$，且当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，

$f\left(x\right)=x\left(x-1\right)$. $f\left(\frac{3}{2}\right)=$______；若对任意 $x\in\left(-\infty,m\right]$，都有 $f\left(x\right)\geq-\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是

______.

【答案】 ①. $-\frac{1}{2}$##-0.5 ②. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

【解析】

【分析】结合函数满足的性质以及当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=x\left(x-1\right)$，即可求得 $f\left(\frac{3}{2}\right)$；利用函数的性质推得其解析式，作出其大致图象，数形结合，求解不等式 $f\left(x\right)\geq-\frac{8}{9}$，即可确定 m 的取值范围.

【详解】由题意得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f(1+\frac{1}{2})=2f(\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)=-\frac{1}{2}$；

当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=x\left(x-1\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\in[-\frac{1}{4},0]$，

当 $x\in\left(-1,0\right]$ 时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，

当 $x\in\left(1,2\right]$ 时，$f\left(x\right)=2f(x-1)=2(x-1)\left(x-2\right)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，

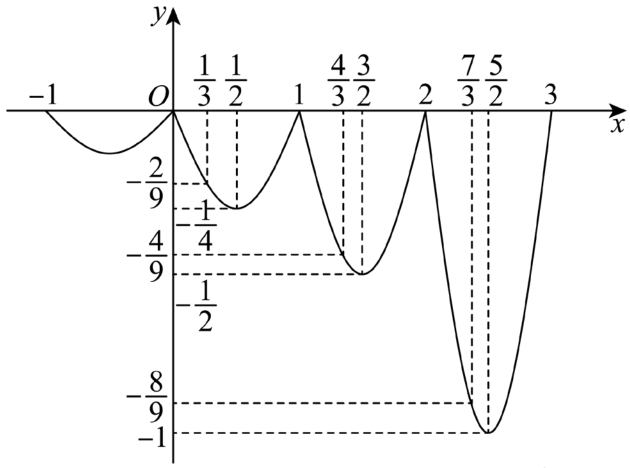
当 $x\in\left(2,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=4(x-2)\left(x-3\right)=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1$，

$\cdots$，

故由 $f\left(x+1\right)=2f\left(x\right)$ 得 $f\left(x+t\right)=2^t f\left(x\right),\left(t\in\mathrm{Z}\right)$，

由此作出函数 $f\left(x\right)$ 的大致图象如图：

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。



当$x\in(2,3]$时，令$f(x)=4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$，解得$x=\frac{7}{3}$或$x=\frac{8}{3}$，

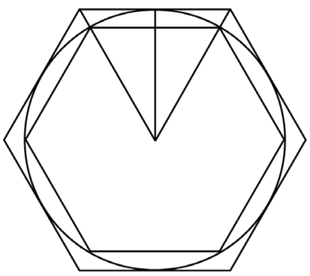
结合图象解不等式$f(x)\geq-\frac{8}{9}$，可得$x\leq\frac{7}{3}$或$x\geq\frac{8}{3}$，

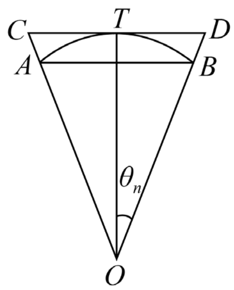
由于对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geq-\frac{8}{9}$，故$m\in\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$，

故答案为：$-\frac{1}{2}$，$\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

15. 作单位圆的外切和内接正3×2^n边形$(n=1,2,\cdots)$，记外切正3×2^n边形周长的一半为a_n，内接正3×2^n边形周长的一半为b_n.计算可得$a_n=3\times2^n\tan\theta_n$，其中$\theta_n$是正$3\times2^n$边形的一条边所对圆心角的一半.

给出下列四个结论：





①$b_n=3\times2^n\sin\theta_n$；②$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$；

③$b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n$；④记$c_n=a_n-b_n$，则$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\frac{c_{n+1}}{c_n}<\frac{1}{4}$.

其中正确结论的序号是__________.

【答案】①③④

【解析】

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【分析】对于①，在等腰三角形 AOB 中求出 $\frac{1}{2}AB$，从而可求出 b_n，对于②，分别计算 $\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$ 进行判断，对于③，分别计算 $b_{n+1}^2,a_{n+1}b_n$ 进行判断，对于④，先计算 c_n，再计算 $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 化简后，利用换元法，构造函数利用导数可求得结果.

【详解】对于①，等腰三角形 AOB 中，$OA=OB=1,\angle AOB=2\theta_n$，则 $\sin\theta_n=\frac{1}{2}AB$，

所以 $b_n=3\times2^n\sin\theta_n$，所以①正确；

对于②，因为 $a_n=3\times2^n\tan\theta_n$，$b_n=3\times2^n\sin\theta_n$，所以 $a_{n+1}=3\times2^{n+1}\tan\theta_{n+1}$，$\theta_n=2\theta_{n+1}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3\times2^{n+1}\tan\theta_{n+1}}$，

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3\times2^n\tan\theta_n}+\frac{1}{3\times2^n\sin\theta_n}=\frac{1}{3\times2^n}\left(\frac{1}{\tan\theta_n}+\frac{1}{\sin\theta_n}\right)$$

$$=\frac{1}{3\times2^n}\cdot\frac{\cos\theta_n+1}{\sin\theta_n}$$

$$=\frac{1}{3\times2^n}\cdot\frac{\cos2\theta_{n+1}+1}{\sin2\theta_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{3\times2^n}\cdot\frac{2\cos^2\theta_{n+1}}{2\sin\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{3\times2^n}\cdot\frac{\cos\theta_{n+1}}{\sin\theta_{n+1}}=\frac{1}{3\times2^n}\cdot\frac{1}{\tan\theta_{n+1}},$$

所以 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$，所以②错误；

对于③，因为 $a_n=3\times2^n\tan\theta_n$，$b_n=3\times2^n\sin\theta_n$，所以 $a_{n+1}=3\times2^{n+1}\tan\theta_{n+1}$，$b_{n+1}=3\times2^{n+1}\sin\theta_{n+1}$，

$\theta_n=2\theta_{n+1}$，

所以 $b_{n+1}^2=\left(3\times2^{n+1}\sin\theta_{n+1}\right)^2=9\times2^{2n+2}\sin^2\theta_{n+1}$，

$$a_{n+1}b_n=\left(3\times2^{n+1}\tan\theta_{n+1}\right)\times\left(3\times2^n\sin\theta_n\right)$$

$$=9\times2^{2n+1}\tan\theta_{n+1}\cdot\sin2\theta_{n+1}$$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$=9\times 2^{2n+1}\dfrac{\sin\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}}\cdot 2\sin\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1}$

$=9\times 2^{2n+2}\sin^2\theta_{n+1}$，

所以 $b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n$，所以③正确；

对于④，$c_n=a_n-b_n=3\times 2^n\tan\theta_n-3\times 2^n\sin\theta_n=3\times 2^n\left(\tan\theta_n-\sin\theta_n\right)$，

所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{3\times 2^{n+1}(\tan\theta_{n+1}-\sin\theta_{n+1})}{3\times 2^n(\tan\theta_n-\sin\theta_n)}=\dfrac{2(\tan\theta_{n+1}-\sin\theta_{n+1})}{\tan\theta_n-\sin\theta_n}$

$=\dfrac{2(\tan\theta_{n+1}-\sin\theta_{n+1})}{\tan 2\theta_{n+1}-\sin 2\theta_{n+1}}$

$=\dfrac{2\sin\theta_{n+1}(\dfrac{1}{\cos\theta_{n+1}}-1)}{\sin 2\theta_{n+1}(\dfrac{1}{\cos 2\theta_{n+1}}-1)}$

$=\dfrac{\dfrac{1-\cos\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}}}{\cos\theta_{n+1}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta_{n+1}}{\cos 2\theta_{n+1}}}$

$=\dfrac{1-\cos\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}}\cdot\dfrac{\cos 2\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}(1-\cos 2\theta_{n+1})}$

$=\dfrac{1-\cos\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}}\cdot\dfrac{2\cos^2\theta_{n+1}-1}{\cos\theta_{n+1}\cdot 2\sin^2\theta_{n+1}}$

$=\dfrac{(1-\cos\theta_{n+1})(2\cos^2\theta_{n+1}-1)}{2(1-\cos^2\theta_{n+1})\cos^2\theta_{n+1}}$，

令 $t=\cos\theta_{n+1}$（$\cos 15^\circ\le t<1$），则

$f(t)=\dfrac{(1-t)(2t^2-1)}{2t^2(1-t^2)}=\dfrac{2t^2-1}{2t^3+2t^2}$，

所以 $f'(t)=\dfrac{4t\left(2t^3+2t^2\right)-\left(2t^2-1\right)\left(6t^2+4t\right)}{\left(2t^3+2t^2\right)^2}=\dfrac{2t\left(2+3t-2t^3\right)}{\left(2t^3+2t^2\right)^2}=\dfrac{2t\left[2(1-t^3)+3t\right]}{\left(2t^3+2t^2\right)^2}>0$，

所以 $f(t)$ 在 $[\cos 15^\circ,1)$ 上递增，

所以 $f(t)<f(1)=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}<\dfrac{1}{4}$，所以④正确，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：此题考查三角函数的综合应用，考查数列的应用，解题的关键是根据题意利用三角函数表示出 a_n 和 b_n，及三角函数恒等变换公式的灵活应用，考查计算能力，属于难题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}$，其中 $0<\omega<2$，有如下三个条件：条件① $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$；条件② $f(x+\pi)=f(x)$；条件③ $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$．从以上三个条件中选择一个作为已知，求解下列问题．

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 1，求实数 m 的取值范围．

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

【答案】（1）$[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in Z$

（2）$[\frac{\pi}{6},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）先将函数的解析式利用三角恒等变换化简为 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，若选①，根据特殊值代入 $f(x)$ 求得 ω，即得函数解析式，结合正弦函数性质即可求得答案；若选②，根据函数的周期性求得 ω，即得函数解析式，结合正弦函数性质即可求得答案；若选③，根据函数的对称性求得 ω，即得函数解析式，结合正弦函数性质即可求得答案；

（2）根据 $x\in[0,m]$，确定 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，结合正弦函数的性质列出相应不等式，即可求得答案．

【小问 1 详解】

由题意得 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

若选① $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\sin\left(2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

由于 $0<\omega<2$，故 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\pi\right)$，

则 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi,\therefore\omega=1$，即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in Z$；

若选② $f(x+\pi)=f(x)$，则 $\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}+2\omega\pi\right)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

故 $2\omega\pi=2k\pi,k\in Z,\therefore\omega=k,k\in Z$，

由于 $0<\omega<2$，故 $\omega=1$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in Z$；

若选③ $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的一条对称轴，

故 $2\times\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，即 $\omega=1+3k,k\in Z$，

由于 $0<\omega<2$，故 $\omega=1$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in Z$；

【小问 2 详解】

当 $x\in[0,m]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，

令 $t=2x+\frac{\pi}{6},\therefore t\in\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，

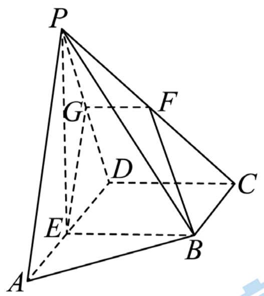
则函数 $y=\sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值为 1，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故 $2m+\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$，解得 $m\geq\frac{\pi}{6}$，

即实数 m 的取值范围是 $[\frac{\pi}{6},+\infty)$.

17. 在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC\parallel AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，E 为线段 AD 的中点.$PE\perp$底面 $ABCD$，点 F 是棱 PC 的中点，平面 BEF 与棱 PD 相交于点 G.



（1）求证：$BE\parallel FG$；

（2）若 PC 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 PB 与平面 BEF 所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】（1）利用平行四边形的判定定理和性质，结合线面平行的判定定理和性质定理进行证明即可；

（2）建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角公式进行求解即可.

【小问1详解】

证明：因为 E 为 AD 中点，

所以 $DE=\frac{1}{2}AD=1$.

又因为 $BC=1$，所以 $DE=BC$．在梯形 $ABCD$ 中，$DE//BC$，

所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形．所以 $BE//CD$.

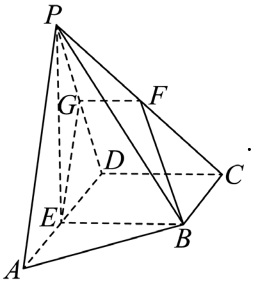
又因为 $BE\not\subset$平面 PCD，且 $CD\subset$平面 PCD，

所以 $BE//$平面 PCD.

因为 $BE\subset$平面 BEF，平面 $BEF\cap$平面 $PCD=FG$，

所以 $BE//FG$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



【小问 2 详解】

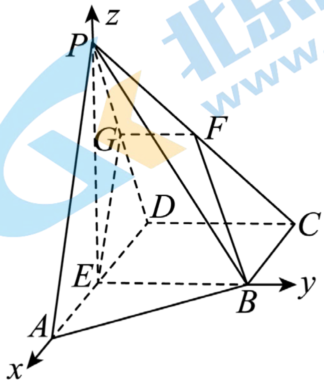
因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，且 AE，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp AE$，且 $PE\perp BE$.

因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形，$\angle ADC=90°$，

所以 $AE\perp BE$.

以 E 为坐标原点，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



则 $E(0,0,0),A(1,0,0),B(0,1,0),C(-1,1,0),D(-1,0,0)$.

设 $P(0,0,m)(m>0)$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(1,-1,m)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$.

因为 PC 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CP},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $m=\sqrt{2}$.

则 $P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，$F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,1,-\sqrt{2}\right)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}y=0\\-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令$x=\sqrt{2}$，则$z=1$，

所以$\vec{n}=\left(\sqrt{2},0,1\right)$.

所以$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线PB与平面BEF的所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

18. 我国脱贫攻坚战取得全面胜利，现行标准下农村贫困人口全部脱贫，消除了绝对贫困．为了解脱贫家庭人均年纯收入情况，某扶贫工作组对A，B两个地区2019年脱贫家庭进行简单随机抽样，共抽取500户家庭作为样本，获得数据如下表：

	A地区	B地区
2019年人均年纯收入超过10000元	100户	150户
2019年人均年纯收入未超过10000元	200户	50户

假设所有脱贫家庭的人均年纯收入是否超过10000元相互独立．

（1）从A地区2019年脱贫家庭中随机抽取1户，估计该家庭2019年人均年纯收入超过10000元的概率；

（2）在样本中，分别从A地区和B地区2019年脱贫家庭中各随机抽取1户，记X为这2户家庭中2019年人均年纯收入超过10000元的户数，求X的分布列和数学期望；

（3）从样本中A地区的300户脱贫家庭中随机抽取4户，发现这4户家庭2020年人均年纯收入都超过10000元．根据这个结果，能否认为样本中A地区2020年人均年纯收入超过10000元的户数相比2019年有变化？请说明理由．

【答案】（1）$\dfrac{1}{3}$；（2）概率分布列见解析，期望为$\dfrac{13}{12}$；（3）可以．

【解析】

【分析】（1）直接由古典概型概率公式计算；

（2）X的可能取值为$0,1,2$，分别计算出概率后可得分布列，然后由期望公式计算出期望；

（3）根据概率的意义作答．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【详解】(1) 由题意所求概率为 $P=\dfrac{100}{100+200}=\dfrac{1}{3}$；

(2) 由题意 X 的可能取值为 $0,1,2$，

B 地区抽取 1 户，纯收入超过 10000 元的概率为 $\dfrac{150}{150+50}=\dfrac{3}{4}$，

$P(X=0)=(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{12}$，

$P(X=2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$，

分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{1}{4}$

期望为 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{7}{12}+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}$；

(3) 如果 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数没有变化，其概率为

$P=\dfrac{C_{100}^{4}}{C_{300}^{4}}=\dfrac{\dfrac{100\times99\times98\times97}{4\times3\times2\times1}}{\dfrac{300\times299\times298\times297}{4\times3\times2\times1}}\approx0.012$，因此发生改变的概率为 $1-0.012=0.988$，概率接近于 1 了，可以认为 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数有改变.

【点睛】思路点睛：本题考查古典概型，考查随机变量的概率分布列和数学期望，考查概率的意义.

求分布列时，需要选确定随机变量的可能取值，然后计算出概率，列表得分布列，最后由期望公式可计算出期望.

19. 已知函数 $f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{2}ax^3-ax^2(a\in R)$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的最值；

(2) 若 $f(x)\le\dfrac{1}{2}ax^3-x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3) 若函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 存在两个极值点 $x_1,x_2(x_1\ne x_2)$，求 $g(x_1)+g(x_2)$ 的取值范围.

【答案】(1) 最小值是 $-\dfrac{1}{e}$，无最大值；(2) $a\ge1$；(3) $(-\infty,-3-\ln4)$.

【解析】

【分析】(1) 由 $a=0$，得到 $f(x)=x\ln x$，再利用导数法求解；

(2) 将 $f(x)\le\dfrac{1}{2}ax^3-x$ 恒成立，转化为 $a\ge\dfrac{\ln x+1}{x}$ 恒成立，设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，用导数法求其最大值即

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

可；

（3）求导，根据 $g(x)$ 在两个极值点 x_1,x_2，得到 $a>4, x_1+x_2=1, x_1x_2=\dfrac{1}{a}$，然后化简得到 $h(a)=g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)=-\dfrac{1}{2}a-\ln a-1$ 求解.

【详解】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=x\ln x$，$f'(x)=1+\ln x$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}$，也是最小值，无最大值.

（2）$\because f(x)\le\dfrac{1}{2}ax^3-x$ 恒成立，

$\therefore x\ln x-ax^2\le -x$ 恒成立，

$\therefore a\ge\dfrac{\ln x+1}{x}$ 恒成立，

设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

令 $\varphi'(x)=0$，则 $x=1$，

$\therefore x\in(0,1), \varphi'(x)>0, \varphi(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty), \varphi'(x)<0, \varphi(x)$ 单调递减

$\therefore \varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=1$

$\therefore a\ge 1$

（3）由题意 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-ax, g'(x)=\dfrac{1}{x}+ax-a=\dfrac{ax^2-ax+1}{x}$，

因为 $g(x)$ 在两个极值点 x_1,x_2，则 x_1,x_2 是方程 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不等正根，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0\\ x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0\end{cases},$$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore a>4, x_1+x_2=1, x_1x_2=\dfrac{1}{a}$，

则 $h(a)=g(x_1)+g(x_2)=\ln x_1+\dfrac{1}{2}ax_1^2-ax_1+\ln x_2+\dfrac{1}{2}ax_2^2-ax_2$，

$=\ln(x_1x_2)+\dfrac{1}{2}a\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-a(x_1+x_2)$

$=\ln\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}a\left(1-\dfrac{2}{a}\right)-a$，

$=-\dfrac{1}{2}a-\ln a-1$，

显然 $h(a)=-\dfrac{1}{2}a-\ln a-1$ 是关于 a 的减函数，

$\therefore h(a)<h(4)=-3-\ln 4$

$\therefore g(x_1)+g(x_2)$ 的取值范围是 $(-\infty,-3-\ln 4)$.

【点睛】方法点睛：恒（能）成立问题的解法：

若 $f(x)$ 在区间 D 上有最值，则

（1）恒成立：$\forall x\in D, f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)_{\min}>0$；$\forall x\in D, f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)_{\max}<0$；

（2）能成立：$\exists x\in D, f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)_{\max}>0$；$\exists x\in D, f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)_{\min}<0$.

若能分离常数，即将问题转化为：$a>f(x)$（或 $a<f(x)$），则

（1）恒成立：$a>f(x) \Leftrightarrow a>f(x)_{\max}$；$a<f(x) \Leftrightarrow a<f(x)_{\min}$；

（2）能成立：$a>f(x) \Leftrightarrow a>f(x)_{\min}$；$a<f(x) \Leftrightarrow a<f(x)_{\max}$.

20. 已知椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过 A（-2，0），B（0，1）两点.

（1）求椭圆 M 的离心率；

（2）设椭圆 M 的右顶点为 C，点 P 在椭圆 M 上（P 不与椭圆 M 的顶点重合），直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S，求证：直线 SQ 过定点.

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）由已知两点坐标得 a,b，求得 c 后可得离心率；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

（2）直线 AB 方程为 $x=2y-2$，设 $P(x_0,y_0)$（$y_0\neq 0$，$y_0\neq \pm 1$），$Q(2y_Q-2,y_Q)$，$S(x_S,0)$．由 C,P,Q 三点共线求得 Q 点坐标（用 P 点坐标表示），由 B,P,S 共线求得S点坐标（用 P 点坐标表示），写出直线 QS 的方程，把 $x_0^2=4-4y_0^2$ 代入化简对方程变形可得定点坐标．

【详解】解：（1）因为点 $A(-2,0)$，$B(0,1)$ 都在椭圆 M 上，

所以 $a=2$，$b=1$．

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$．

所以椭圆 M 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（2）由（1）知椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$C(2,0)$．

由题意知：直线 AB 的方程为 $x=2y-2$．

设 $P(x_0,y_0)$（$y_0\neq 0$，$y_0\neq \pm 1$），$Q(2y_Q-2,y_Q)$，$S(x_S,0)$．

因为 C,P,Q 三点共线，所以有 $\overrightarrow{CP}\,//\,\overrightarrow{CQ}$，$\overrightarrow{CP}=(x_0-2,y_0),\overrightarrow{CQ}=(2y_Q-2-2,y_Q)$，

所以 $(x_0-2)y_Q=y_0(2y_Q-4)$．

所以 $y_Q=\dfrac{4y_0}{2y_0-x_0+2}$．

所以 $Q(\dfrac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2},\dfrac{4y_0}{2y_0-x_0+2})$．

因为 B,S,P 三点共线，

所以 $\dfrac{1}{-x_s}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，即 $x_s=\dfrac{x_0}{1-y_0}$．

所以 $S(\dfrac{x_0}{1-y_0},0)$．

所以直线 QS 的方程为 $x=\dfrac{\dfrac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2}-\dfrac{x_0}{1-y_0}}{\dfrac{4y_0}{2y_0-x_0+2}}y+\dfrac{x_0}{1-y_0}$，

即 $x=\dfrac{{x_0}^2-4{y_0}^2-4x_0y_0+8y_0-4}{4y_0(1-y_0)}y+\dfrac{x_0}{1-y_0}$．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

又因为点 P 在椭圆 M 上，所以 $x_0^2=4-4y_0^2$．

所以直线 QS 的方程为 $x=\dfrac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}(y-1)+2$．

所以直线 QS 过定点 $(2,1)$．

【点睛】关键点点睛：本题考查求椭圆的离心率，考查椭圆的直线过定点问题，解题方法是设椭圆上的点坐标 $P(x_0,y_0)$，利用三点共线变为向量平行，求得直线交点 Q,S 的坐标，得出直线 QS 方程，再由 P 在椭圆上，代入化简凑配出定点坐标．

21．已知有限数列 $\{a_n\}$，从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、$\cdots$、第 i_m 项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），顺次排列构成数列 $\{b_k\}$，其中 $b_k=a_{i_k}$，$1\le k\le m$，则称新数列 $\{b_k\}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的子列，若数列 $\{a_n\}$ 的每一子列的所有项的和都不相同，则称数列 $\{a_n\}$ 为完全数列．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n$，$1\le n\le 25, n\in\mathbf{N}^*$．

（1）判断下面数列 $\{a_n\}$ 的两个子列是否为完全数列，并说明由；

数列①：3，5，7，9，11；数列②：2，4，8，16．

（2）数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度为 m，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，证明：m 的最大值为 6；

（3）数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度 $m=5$，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，求 $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}+\dfrac{1}{b_4}+\dfrac{1}{b_5}$ 的最大值．

【答案】（1）数列①不是完全数列，数列②是完全数列，理由见详解

（2）证明见详解　　（3）$\dfrac{31}{16}$

【解析】

【分析】（1）根据题意逐项分析判断即可；

（2）根据题意利用反证法结合等差数列求和分析说明；

（3）根据题意转化为求 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 的各项最小值，结合题意分析运算即可．

【小问 1 详解】

数列①不是完全数列，数列②是完全数列，理由如下：

数列①：因为 $3+9=5+7=12$，所以数列①不是完全数列；

数列②：因为 $2+4=6, 2+8=10, 2+16=18, 4+8=12, 4+16=20, 8+16=24$，

$2+4+8=14, 2+4+16=22, 2+8+16=26, 4+8+16=28, 2+4+8+16=30$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

即每一子列的所有项的和都不相同，所以数列②是完全数列.

【小问 2 详解】

假设存在完全数列$\{b_k\}$，其长度为$7\le m\le 25$，则$b_1<b_2<\cdots<b_m$，

则长度为m的数列$\{b_k\}$的每一子列的所有项的和有2^m-m-1个，

设其所有项的和的最小值为$a=b_1+b_2$，最大值为b，

则$b=25+24+\cdots+28-m+b_1+b_2=\dfrac{(m-2)(53-m)}{2}+b_1+b_2$，

可得$2^m-m-1\le\left[\dfrac{(m-2)(53-m)}{2}+b_1+b_2\right]-(b_1+b_2)+1=\dfrac{(m-2)(53-m)}{2}+1$，

整理得$2^{m+1}+m^2-57m+102\le 0$，

当$m=7$时，$2^{7+1}+7^2-57\times 7+102=8>0$；

当$m=8$时，$2^{8+1}+8^2-57\times 8+102=222>0$；

当$m=9$时，$2^{9+1}+9^2-57\times 9+102=694>0$；

当$10\le m\le 25$，则$2^{m+1}+m^2+102\ge 2^{10+1}+10^2+102=2250$，$57m\le 57\times 25=1425$，

所以$2^{m+2}+m^2-57m+104\ge 2250-1425=825>0$；

综上所述：当$7\le m\le 25$时，不存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$2^{m+2}+m^2-57m+102\le 0$成立.

所以假设不成立，则$m\le 6$，且$12,18,21,23,24,25$，符合题意，

所以m的最大值为 6.

【小问 3 详解】

因为$\{b_k\}$长度$m=5$，且$\{b_k\}$为完全数列，且$b_1<b_2<b_3<b_4<b_5$，

可知b_1的最小值为 1，b_2的最小值为 2，取$b_1=1,b_2=2$；

因为$b_1+b_2=3$，则b_3的最小值为 4，取$b_3=4$；

因为$b_1+b_3=5,b_2+b_3=6,b_1+b_2+b_3=7$，则$b_4$的最小值为 8，取$b_4=8$；

因为$b_1+b_4=9,b_2+b_4=10,b_3+b_4=12,b_1+b_2+b_4=11,b_1+b_3+b_4=13,b_2+b_3+b_4=14$，

$b_1+b_2+b_3+b_4=15$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

则 b_5 的最小值为 16，取 $b_5=16$；

此时 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 均取到对应的最小值，则 $\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\frac{1}{b_3},\frac{1}{b_4},\frac{1}{b_5}$ 均取到对应的最大值，

则 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}+\frac{1}{b_5}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$，

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}+\frac{1}{b_5}$ 的最大值为 $\frac{31}{16}$.

【点睛】关键点睛：1.对于数列新定义问题，要充分理解题意，根据题意分析运算；

2.对于直接证明比较困难，可以采用反证法，适当放缩运算求解.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

北京高考

微信搜一搜

京考一点通