

2023 届高三一轮复习联考(一) 全国卷  
文科数学试卷

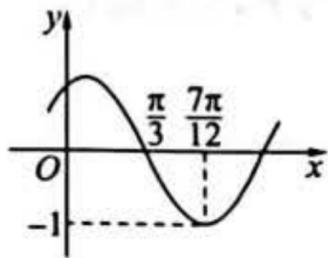
注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

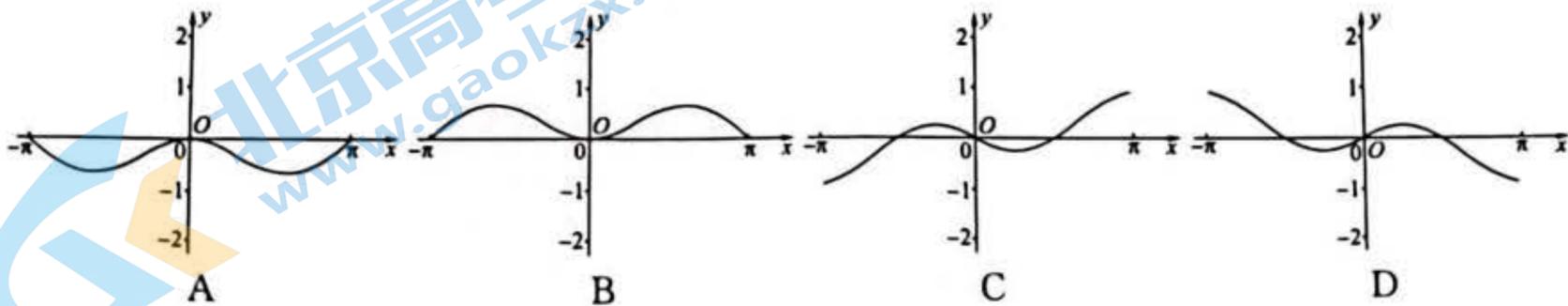
考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 1.若集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $(-1, 0)$       B.  $(0, 2)$       C.  $(2, 3)$       D.  $(-1, 3)$
- 2.下列函数中,最小正周期为  $\pi$  的奇函数是  
A.  $y = |\tan x|$       B.  $y = \sin |2x|$   
C.  $y = \sin x \cos x$       D.  $y = \sin x$
- 3.命题“ $\forall x \in (1, 2), \log_2 x - a < 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是  
A.  $a \geq 0$       B.  $a \geq 2$       C.  $a \geq 1$       D.  $a \leq 4$
- 4.函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象如图所示,为了得到  $g(x) = \cos 2x$  的图象,则只需将  $f(x)$  的图象



- A. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度
  - B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度
  - C. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度
  - D. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度
- 5.函数  $f(x) = \frac{\sin x \ln(\sqrt{x^2+1} - x)}{2}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的图象大致为



6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 0, \\ 2-x^2, & x \geq 0, \end{cases}$  则不等式  $f(2a+1) > f(3a-4)$  的解集为

A.  $(5, +\infty)$

B.  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

C.  $(-\infty, 5)$

D.  $(-\infty, -\frac{1}{2})$

7. 已知  $\tan(\alpha+\beta), \tan(\alpha-\beta)$  是方程  $x^2+5x+6=0$  的两个根, 则  $\tan 2\alpha =$

A. -1

B. 1

C. -2

D. 2

8. 函数  $f(x) = \ln \frac{4-x}{x+4} + (x^2+2)\sin x + 2$  在  $[-3, 3]$  上的最大值与最小值的和为

A. -2

B. 2

C. 4

D. 6

9. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 2$ , 设  $a = f(\log_2 0.2), b = f(\log_{0.3} 0.2), c = f(0.2^{0.3})$ , 则

A.  $a > c > b$

B.  $a > b > c$

C.  $c > b > a$

D.  $b > c > a$

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax - 2, & x \leq 2, \\ x + \frac{36}{x} - 6a, & x > 2, \end{cases}$  若  $f(x)$  的最小值为  $f(2)$ , 则实数  $a$  的取值范围为

A.  $[2, 5]$

B.  $[2, +\infty)$

C.  $[2, 6]$

D.  $(-\infty, 5]$

11. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数, 且满足  $f(3x-2)$  为偶函数,  $f(2x-1)$  为奇函数, 则下列说法一定正确的是

A. 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称

B. 函数  $f(x)$  的周期为 2

C. 函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  中心对称

D.  $f(2023) = 0$

12. 已知  $a, b$  均为正实数, 且  $4a + b(1-a) = 0$ , 则下列不等式正确的是

①  $ab \geq 16$     ②  $2a + b \geq 6 + 4\sqrt{2}$     ③  $a - b < 0$     ④  $\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} \geq \frac{1}{2}$

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①③④

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $(x+yi)i = 2+i, x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $x+y =$  \_\_\_\_\_.

14.  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ , 若  $z = kx + y$  取得最大值的最优解有无数个, 则实数  $k =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知  $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $3\sin a - \cos a = \sqrt{5}$ , 则  $\tan a =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = (kx + 2k)e^x, g(x) = x + 1$ , 若不等式  $f(x) < g(x)$  的解集中恰有两个非负整数, 则实数  $k$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60 分。

17. (12 分) 已知函数  $f(x) = 4\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调递减区间；

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的值域.

18. (12 分) 为响应国家环保的号召，某企业计划 2020 年引进新型环保设备生产新能源汽车，通过市场分析，全年需投入固定成本 1 000 万元，每生产  $x$  (百辆) 汽车，需另投入成本  $C(x)$  万

元，且  $C(x) = \begin{cases} 10x^2 + 500x, & 0 < x < 20, \\ 801x + \frac{400}{x} - 2000, & x \geq 20, \end{cases}$  若每辆新能源汽车售价为 8 万元，并且全年内生

产的汽车当年能全部销售完.

(1) 求 2020 年的利润  $L$  (万元) 关于年产量  $x$  (百辆) 的函数关系式  $L(x)$  (其中利润 = 销售额 - 成本)

(2) 当 2020 年产量为多少百辆时，企业所获利润最大？并求最大利润.

19. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  在点  $P(1, f(1))$  处的切线方程为  $4x - y - 2 = 0$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间；

(2) 若函数  $g(x) = f(x) - m$  有三个零点，求实数  $m$  的取值范围.

20.(12分)已知函数  $f(x) = \log_3(4^x - 9 \times 2^{x+1} + 113)$ , 函数  $g(x) = x^2 - 2mx + 5m$ .

(1)求不等式  $f(x) \leq 4$  的解集;

(2)若  $\forall x_1 \in [1, 3], \exists x_2 \in [0, 2]$ , 使得  $f(x_1) \leq g(x_2)$ , 求实数  $m$  的取值范围.

21.(12分)已知函数  $f(x) = 2\ln x + ax^2 - 2x (a \in \mathbb{R})$ .

(1)若函数  $f(x)$  存在单调递减区间, 求实数  $a$  的取值范围;

(2)设  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  是函数  $f(x)$  的两个极值点, 证明:  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2a - 1$ .

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

已知曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 3 + 3\cos \alpha, \\ y = 3\sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 曲线  $C_2$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$

( $\alpha$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 射线  $OM$  的极坐标

方程为  $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \geq 0)$ .

(1)求曲线  $C_1$  和曲线  $C_2$  的极坐标方程和射线  $OM$  的平面直角坐标方程;

(2)若射线  $OM$  与曲线  $C_1$  的交点为  $P$ , 与曲线  $C_2$  的交点为  $Q$ , 求  $|OP| \cdot |OQ|$  的值.

23.[选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数  $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ .

(1)解不等式  $f(x) > 5$ ;

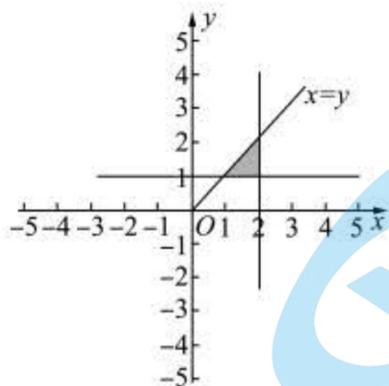
(2)若不等式  $f(x) \geq t$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

## 2023 届高三一轮复习联考(一) 全国卷

## 理科数学参考答案及评分意见

- 1.A 【解析】由题,  $A = (-1, 2), B = (0, 3)$ , 所以  $A \cap B = (0, 2)$ , 故选 A.
- 2.D 【解析】设  $z = x + yi$ , 因为  $(x + yi)i = 2 + i$ , 所以  $-y + xi = 2 + i$ , 则  $x = 1, y = -2$ , 则对应的点在第四象限, 故选 D.
- 3.A 【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x) = f(-x)$ , 所以  $f(x)$  为偶函数, 所以 C, D 错误, 又  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , 所以 B 错误, 故选 A.
- 4.B 【解析】因为命题  $\forall x \in (1, 2), \log_2 x - a < 0$  是真命题, 当  $x \in (1, 2)$  时,  $0 < \log_2 x < 1$ , 若  $a > \log_2 x$  恒成立, 则  $a \geq 1$ , 结合选项, 命题是真命题的一个充分不必要条件是  $a \geq 2$ , 故选 B.
- 5.B 【解析】由图可知一天内在凌晨到 6 点 12 分水深超过 5 米, 在 12 点 24 分到 18 点 36 分水深超过 5 米, 故 A 错误, B 正确; 涨落潮周期为 12.4 小时即 12 小时 24 分钟, 故 C 错误; 海水水深保持在 5 米以上的时间为  $3.1 + 3.1 = 6.2$  小时, 故 D 错误, 故选 B.
- 6.D 【解析】根据题目所给的函数解析式, 可知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数, 所以  $2a + 1 < 3a - 4$ , 解得  $a > 5$ , 故选 D.
- 7.C 【解析】由题易知  $f(-x) + f(x) = 4$ , 所以函数  $f(x)$  关于点  $(0, 2)$  对称, 故最大值与最小值也关于  $(0, 2)$  对称, 其和为 4, 故选 C.
- 8.B 【解析】由于  $\tan(\alpha + \beta), \tan(\alpha - \beta)$  是方程  $x^2 + 5x + 6 = 0$  的两个根, 所以  $\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta) = -5, \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan(\alpha - \beta) = 6$ , 所以  $\tan 2\alpha = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan(\alpha - \beta)} = \frac{-5}{1 - 6} = 1$ , 故选 B.
- 9.B 【解析】函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 2$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + \cos(-x) - 2 = f(x)$ , 故  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 2$  为偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) = x - \sin x$ , 令  $g(x) = x - \sin x$ , 则  $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 即  $g(x) = x - \sin x$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 故  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 所以  $f'(x) \geq 0$ , 则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 由于  $\log_2 0.2 = \log_2 \frac{1}{5} = -\log_2 5 \in (-3, -2), 2 = \log_{0.3} 0.09 > \log_{0.3} 0.2 > \log_{0.3} 0.3 = 1, 0 < 0.2^{0.3} < 1$ , 所以  $a > b > c$ , 故选 B.
- 10.A 【解析】当  $x > 2$  时,  $x + \frac{36}{x} - 6a \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}} - 6a = 12 - 6a$ , 当且仅当  $x = 6$  时, 等号成立, 即当  $x > 2$  时, 函数  $f(x)$  的最小值为  $12 - 6a$ , 当  $x \leq 2$  时,  $f(x) = x^2 - 2ax - 2$ , 要使得函数  $f(x)$  的最小值为  $f(2)$ , 则满足  $\begin{cases} a \geq 2, \\ f(2) = 2 - 4a \leq 12 - 6a, \end{cases}$  解得  $2 \leq a \leq 5$ .
- 故选 A.
- 11.C 【解析】因为  $f(3x - 2)$  为偶函数, 所以  $f(3x - 2) = f(-3x - 2)$ , 所以  $f(x - 2) = f(-x - 2), f(x) = f(-x - 4)$ , 所以函数  $f(x)$  关于直线  $x = -2$  对称, 不能确定  $f(x)$  是否关于直线  $x = 1$  对称, ①错误; 因为  $f(2x - 1)$  为奇函数, 所以  $f(2x - 1) = -f(-2x - 1)$ , 所以  $f(x - 1) = -f(-x - 1)$ , 所以  $f(x) = -f(-x - 2)$ , 所以函数  $f(x)$  关于点  $(-1, 0)$  中心对称, 故②正确, 且函数  $f(x)$  的周期为 4, 故③正确;  $f(2023) = f(506 \times 4 - 1) = f(-1) = 0$ , 故④正确, 故选 C.
- 12.B 【解析】 $\because f(x)$  的定义域为  $(1, +\infty)$ , 易得  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又  $f(2) = 0, \therefore f(x)$  只有一个零点  $x = 2$ . 若  $f(x)$  和  $g(x)$  互为“零点相邻函数”, 则  $g(x)$  在  $[1, 3]$  上存在零点,  $\therefore \Delta = a^2 - 4(8 - a) \geq 0$ , 解得  $a \geq 4$  或  $a \leq -8$ . (1) 若  $\Delta = 0$ , 即  $a = 4$  或  $a = -8$  时,  $g(x)$  只有一个零点  $x = \frac{a}{2}$ , 显然当  $a = 4$  时,  $\frac{a}{2} = 2 \in [1, 3]$ , 符合题意, 当  $a = -8$  时,  $\frac{a}{2} \notin [1, 3]$ , 不符合题意; (2) 若  $\Delta > 0$ , 即  $a < -8$  或  $a > 4$  时,
- ①若  $g(x)$  在  $[1, 3]$  上存在 1 个零点, 则  $g(1) \cdot g(3) \leq 0$ , 即  $(9 - 2a)(17 - 4a) \leq 0$ , 解得  $\frac{17}{4} \leq a \leq \frac{9}{2}, \therefore \frac{17}{4} \leq a \leq \frac{9}{2}$ .
- ②若  $g(x)$  在  $[1, 3]$  上存在 2 个零点, 则  $\begin{cases} g(1) \geq 0, \\ g(3) \geq 0, \\ 1 < \frac{a}{2} < 3, \end{cases} \therefore 4 < a \leq \frac{17}{4}$ .
- 综上所述,  $a$  的取值范围是  $\left[4, \frac{9}{2}\right]$ . 故选 B.

13.-1 【解析】作出满足约束条件  $\begin{cases} x \geq y, \\ x \leq 2, \\ y \geq 1 \end{cases}$  对应的平面区域, 如图所示,



由  $z=kx+y$  得  $y=-kx+z$ , 当  $k=0$  时, 直线  $y=-kx+z=z$ , 此时取得最大值的最优解只有一个, 不满足条件, 当  $-k>0$  时, 即直线  $y=-kx+z$  的纵截距取得最大值时,  $z$  取得最大值, 此时直线与  $x=y$  重合时, 最大值有无数个,  $-k=1$ , 解得  $k=-1$ ; 当  $-k<0$  时, 目标函数的最优解只有一个, 不满足题意, 故答案为  $-1$ .

14.2 【解析】因为  $3\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{5} > 0$ , 所以  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 又因为  $(3\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 5$ , 所以  $9\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 5$ , 所以

$$\frac{9\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 5, \text{ 所以 } \frac{9\tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 1}{1 + \tan^2\alpha} = 5, 2\tan^2\alpha - 3\tan\alpha - 2 = 0, \text{ 所以 } \tan\alpha = 2 \text{ 或 } \tan\alpha = -\frac{1}{2} \text{ (舍).}$$

15.  $\sqrt{5} + 1$  【解析】由三角不等式可得  $|z-2| = |(z-i) - (2-i)| \leq |z-i| + |2-i| = 1 + \sqrt{5}$ , 即  $|z-2|$  的最大值为  $\sqrt{5} + 1$ .

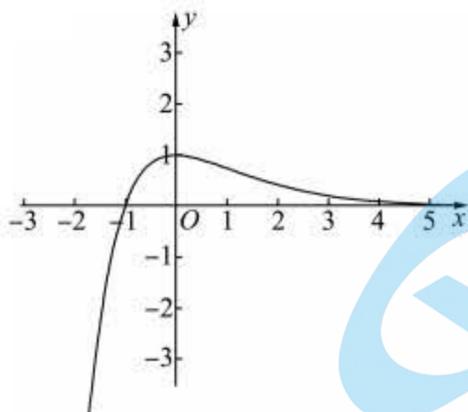
16.  $[\frac{3}{4e^2}, \frac{2}{3e}]$  【解析】 $f(x) < g(x)$  等价于  $(kx+2k)e^x - x - 1 < 0$ , 即  $k(x+2) < \frac{x+1}{e^x}$ . 设  $\varphi(x) = \frac{x+1}{e^x}$ ,  $h(x) = k(x+2)$ , 则上面不等式转化为  $h(x) < \varphi(x)$ , 直线  $h(x) = k(x+2)$  恒过定点  $(-2, 0)$ , 要使  $f(x) < g(x)$  的解集中恰有两个整数, 只需  $\varphi(x)$  的图象在

$h(x)$  的图象上方所对应的  $x$  的取值范围中恰好有两个整数解. 因为  $\varphi'(x) = \frac{e^x - (x+1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x}$ , 所以  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,

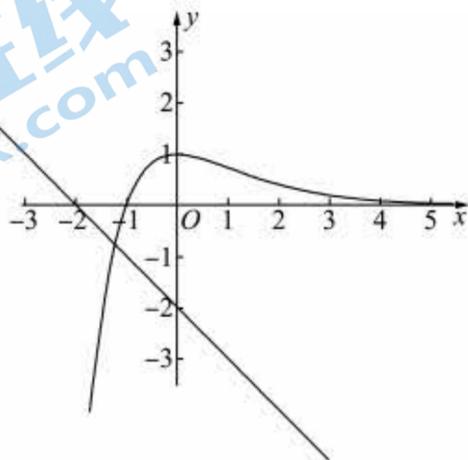
$\varphi(x)$  单调递增,  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ,  $\varphi(x)$  单调递减, 所以  $\varphi(x)_{\max} = \varphi(0) = 1$ , 且  $\varphi(-1) = 0$ , 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ ,

$x \rightarrow +\infty$  时,  $\varphi(x) \rightarrow 0$ ,

根据上述结论作出  $\varphi(x)$  的图象如下图所示:

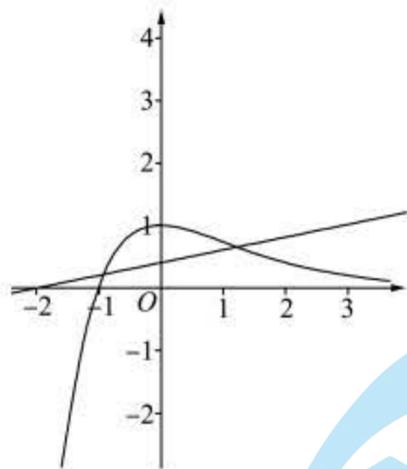


当  $k \leq 0$  时, 作出  $\varphi(x), h(x)$  的图象如下图所示:



从图中可以看出, 当  $x \in [-1, +\infty)$  时,  $\varphi(x)$  的图象恒在  $h(x)$  的图象上方, 所以  $h(x) < \varphi(x)$  恒成立, 所有的  $x$  的取值范围中, 整数解有无穷多个, 不符合题意;

当  $k > 0$  时, 作出  $\varphi(x), h(x)$  的图象如图所示:



从图象可得,要使  $\varphi(x)$  的图象在  $h(x)$  的图象上方所对应的  $x$  的取值范围中恰好有两个整数解,只需满足:

$$\begin{cases} \varphi(1) > h(1), \\ \varphi(2) \leq h(2), \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{2}{e} > 3k, \\ \frac{3}{e^2} \leq 4k, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{3}{4e^2} \leq k < \frac{2}{3e}, \text{ 综上, } \frac{3}{4e^2} \leq k < \frac{2}{3e}.$$

17.【解析】(1)  $f(x) = 4\cos x \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1 = 2\sqrt{3}\cos x \sin x - 2\cos^2 x + 1 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ , ..... 3分

所以  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 令  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , ..... 4分

则  $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 所以函数的单调递减区间为  $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ . ..... 6分

(2) 因为  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ , 所以  $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , ..... 8分

所以  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ , ..... 9分

所以函数  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值为  $\sqrt{3}$ , 最小值为  $-2$ , ..... 10分

即  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的值域为  $[-2, \sqrt{3}]$ . ..... 12分

18.【解析】(1) 根据题意可知,

当  $0 < x < 20$  时,  $L(x) = 800x - 10x^2 - 500x - 1000 = -10x^2 + 300x - 1000$ , ..... 2分

当  $x \geq 20$  时,  $L(x) = 800x - 801x - \frac{400}{x} + 2000 - 1000 = 1000 - \left(x + \frac{400}{x}\right)$ , ..... 4分

所以  $L(x) = \begin{cases} -10x^2 + 300x - 1000, & 0 < x < 20, \\ 1000 - \left(x + \frac{400}{x}\right), & x \geq 20. \end{cases}$  ..... 5分

(2) 当  $0 < x < 20$  时,  $L(x) = -10x^2 + 300x - 1000$ ,  
 $\therefore$  当  $x = 15$  时,  $L(x)$  取得最大值 1250; ..... 8分

当  $x \geq 20$  时,  $L(x) = 1000 - \left(x + \frac{400}{x}\right) \leq 1000 - 2\sqrt{x \cdot \frac{400}{x}} = 960$ ,

当且仅当  $x = \frac{400}{x}$  即  $x = 20$  时取等号, ..... 10分

$\therefore$  综上, 当  $x = 15$  时,  $L(x)$  取得最大值 1250.  
 即 2020 年产量为 15 百辆时, 企业所获利润最大, 最大利润为 1250 万元. .... 12分

19.【解析】(1) 由题可得  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ , ..... 1分

由题意得  $\begin{cases} f(1) = 2 + a + b = 2, \\ f'(1) = 3 + 2a + b = 4, \end{cases}$  ..... 2分

解得  $a = 1, b = -1$ , ..... 3分

所以  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1, f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ , ..... 4分

由  $f'(x) > 0$  得  $x < -1$  或  $x > \frac{1}{3}$ ,

由  $f'(x) < 0$  得  $-1 < x < \frac{1}{3}$ , ..... 5分

所以  $f(x)$  的单调递减区间是  $(-1, \frac{1}{3})$ , 单调递增区间是  $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$ . ..... 6分

(2) 因为  $g(x) = f(x) - m = x^3 + x^2 - x + 1 - m, g'(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ , ..... 7分

由(1)可知,  $g(x)$  在  $x = -1$  处取得极大值, 在  $x = \frac{1}{3}$  处取得极小值,

$g(x)$  的单调递减区间是  $(-1, \frac{1}{3})$ , 单调递增区间是  $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$ . ..... 8分

依题意, 要使  $g(x)$  有三个零点, 则  $\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(\frac{1}{3}) < 0. \end{cases}$

即  $\begin{cases} g(-1) = 2 - m > 0, \\ g(\frac{1}{3}) = \frac{22}{27} - m < 0. \end{cases}$  ..... 10分

解得  $\frac{22}{27} < m < 2$ , 经检验,  $g(-2) = m - 1 < 0, g(2) = m + 11 > 0$ , ..... 11分

根据零点存在定理, 可以确定函数有三个零点, 所以  $m$  的取值范围为  $(\frac{22}{27}, 2)$ . ..... 12分

20.【解析】(1) 由  $4^x - 9 \times 2^{x+1} + 113 = 4^x - 18 \times 2^x + 113 = (2^x - 9)^2 + 32 > 0$ , 可知  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

由  $\log_3(4^x - 9 \times 2^{x+1} + 113) \leq 4$ , 得  $4^x - 18 \times 2^x + 32 \leq 0$ . ..... 2分

令  $t = 2^x$ , 则  $t^2 - 18t + 32 \leq 0$ , 解得  $2 \leq t \leq 16$ , 由  $2 \leq 2^x \leq 16$ , 得  $1 \leq x \leq 4$ , ..... 4分

所以不等式  $f(x) \leq 4$  的解集为  $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$ . ..... 5分

(2) 由题意,  $\forall x_1 \in [1, 3]$ , 有  $f(x_1) \leq g(x_2)$ , 所以  $g(x_2) \geq f(x)_{\max}$ . ..... 7分

因为  $f(x) = \log_3[(2^x - 9)^2 + 32], \forall x_1 \in [1, 3]$ , 有  $2 \leq 2^x \leq 8$ , 所以  $f(x)_{\max} = 4$ , ..... 8分

$\exists x_2 \in [0, 2]$ , 使得  $g(x_2) \geq 4$ , 只要  $g(x)_{\max} \geq 4$  即可. ..... 9分

函数  $g(x)$  的图象开口向上, 且它的对称轴方程为  $x = m$ .

① 当  $m \leq 1$  时,  $g(x)_{\max} = g(2) = 4 - 4m + 5m \geq 4$ , 所以  $0 \leq m \leq 1$ ; ..... 10分

② 当  $m > 1$  时,  $g(x)_{\max} = g(0) = 5m \geq 4$ , 解得  $m \geq \frac{4}{5}$ , 所以  $m > 1$ . ..... 11分

综上所述,  $m$  的取值范围为  $[0, +\infty)$ . ..... 12分

21.【解析】(1) 由  $f(x) \leq mx$  得  $2x - \sin x \leq mx$ , 即  $m \geq 2 - \frac{\sin x}{x}$ , 其中  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , ..... 2分

令  $h(x) = 2 - \frac{\sin x}{x}, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , 得  $h'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ ,

设  $\varphi(x) = \sin x - x \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

则  $\varphi'(x) = x \sin x > 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增,

所以  $\varphi(x) > \varphi(0) = \sin 0 - 0 \times \cos 0 = 0$ , 所以  $h'(x) > 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增, 所以  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2}]$  上有最大值,

$h(x)_{\max} = h(\frac{\pi}{2}) = 2 - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{2}{\pi}$ , ..... 4分

所以  $m$  的取值范围为  $[2 - \frac{2}{\pi}, +\infty)$ . ..... 5分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯