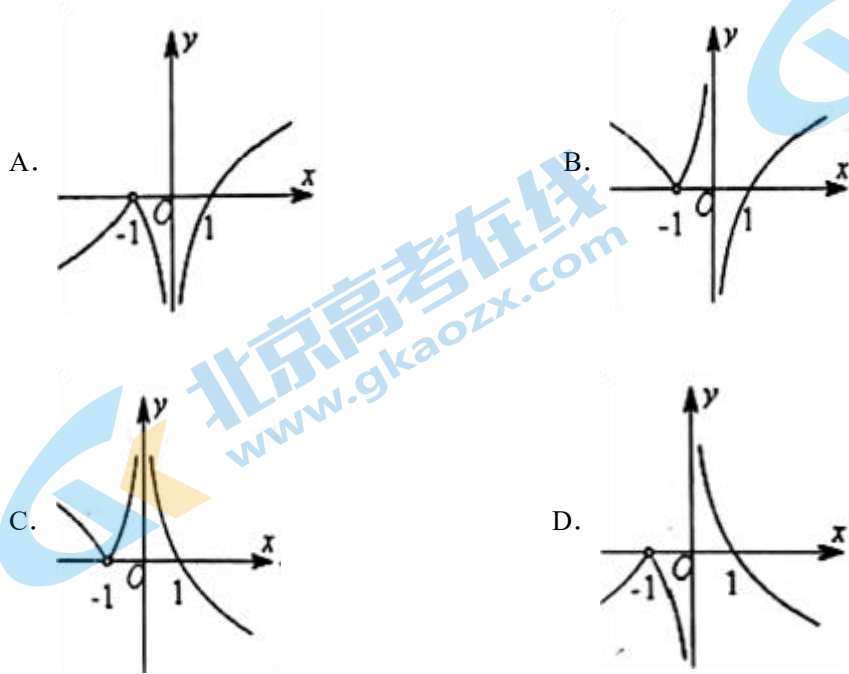


首师附中 2019-2020 学年度第二学期高一数学第二次月考考试试卷

一、单选题 (共 40 分, 每小题 4 分, 共 10 小题)

1. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 ()



2. 用二分法求函数 $f(x) = \log_2 x + a - 2x$ 零点的近似值时, 如果确定零点所处的初始区间为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, 那么 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(\frac{5}{2}, +\infty)$ C. $(2, \frac{5}{2})$ D. $(-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$

3. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 6$, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $[-5, 5]$ B. $[-4, 4]$ C. $[-3, 3]$ D. $[-2, 2]$

4. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | x < 3\}$, 则 $A \cap (C_R B) = ()$

- A. $\{4, 5\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

5. 函数 $y = \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{1 - 4x^2}$ 的定义域为 ()

- A. $\{x | x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{2}\}$ B. $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $\{\frac{1}{2}\}$

6. 设集合 $P = \{m | -1 < m \leq 0\}$, $Q = \{m \in \mathbb{R} | mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列说法正确的是

- A. P 是 Q 的真子集
 B. Q 是 P 的真子集
 C. $P = Q$
 D. $P \cap Q = \emptyset$

7. 已知 α 是第二象限的角, 角 β 终边经过点 $P(\sin \alpha, \cos \alpha)$, 则 β 为第几象限的角:

- A. 第一象限
 B. 第二象限
 C. 第三象限
 D. 第四象限

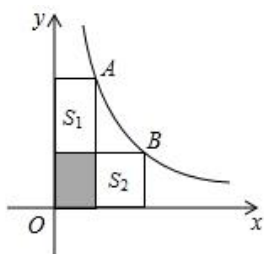
8. 已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $5^b = \frac{1}{4}$, $c = 6^{\frac{1}{3}}$, 则 ()

- A. $a > b > c$
 B. $a > c > b$
 C. $c > a > b$
 D. $b > c > a$

9. 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值 ()

- A. $\frac{3}{2}$
 B. 3
 C. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$
 D. $3+2\sqrt{2}$

10. 如图, A, B 两点在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上, 分别经过 A, B 两点向坐标轴作垂线段, 已知 $S_{\text{阴影}} = 1$, 则 $S_1 + S_2$ 等于 ()



- A. 6
 B. 5
 C. 4
 D. 3

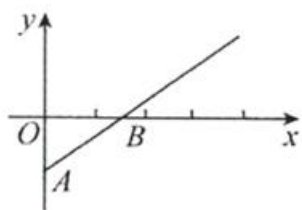
二、填空题 (共 25 分, 每小题 5 分, 共 5 小题)

11. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (x, -1)$, 且 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 \vec{b} 共线, 则 x 的值为_____

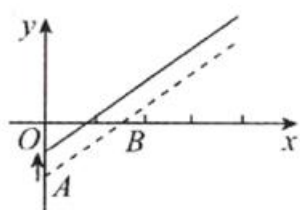
12. 若 $a^{10} = \frac{1}{2}$, $a^m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $m =$ _____.

13. 如图①是反映某条公交线路收支差额 (即营运所得票价收入与付出成本的差) y 与乘客量 x 之间关系的图像. 由于目前该条公交线路亏损, 公司有关人员提出了两种调整的建议, 如图②③所示:

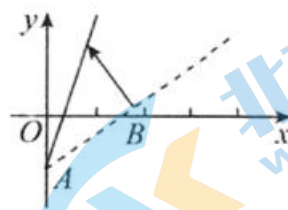
给出下列说法：(1) 图②的建议：提高成本，并提高票价；(2) 图②的建议：降低成本，并保持票价不变；(3) 图③的建议：提高票价，并保持成本不变；(4) 图③的建议：提高票价，并降低成本。其中所有说法正确的序号是_____。



①



图②



图③

14. 复数 $\frac{(1+2i)^2}{3-4i}$ 的值是_____。

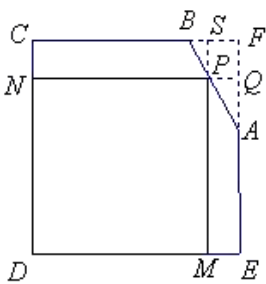
15. 已知函数 $y = a^{x-2} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恒过定点 (m, n) , 则 $m + n =$ _____。

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

16. 设 $f(x) = \frac{2}{2^x + 1} + m, x \in R, m$ 为常数. (14 分)

- (1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 求实数 m 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 R 上的单调性, 并用单调性的定义予以证明;
- (3) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的最小值.

17. 有一块铁皮零件, 其形状是由边长为 30cm 的正方形截去一个三角形 ABF 所得的五边形 $ABCDE$, 其中 $AF = 8\text{cm}$, $BF = 6\text{cm}$, 如图所示. 现在需要用这块材料截取矩形铁皮 $DMPN$, 使得矩形相邻两边分别落在 CD, DE 上, 另一顶点 P 落在边 CB 或 BA 边上. 设 $DM = x\text{cm}$, 矩形 $DMPN$ 的面积为 $y\text{cm}^2$. (14分)



- (1) 试求出矩形铁皮 $DMPN$ 的面积 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (2) 试问如何截取 (即 x 取何值时), 可使得到的矩形 $DMPN$ 的面积最大?



18. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$. (14分)

(I) 求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值和函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 的单调递减区间及最大值, 并指出相应的 x 的取值集合.





19. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2 \geq 2x - ax (a \in R)$. (15 分)





20. 已知 $f(x) = 2 + \log_4 x, x \in [1, 16]$, 函数 $g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$. (14分)

(1) 求函数 $g(x)$ 的定义域;

(2) 求函数 $g(x)$ 的最大值及此时 x 的值.

21. 设 p : “关于 x 的不等式 $x^2 - ax + a + \frac{5}{4} > 0$ 的解集为 R ”, q : “函数 $f(x) = x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + a$ 在区间 $(-1, 2)$ 上有

零点”. (14分)

(1) 若 q 为真, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 求 a 的取值范围



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

1. C

【解析】

【分析】

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

【详解】

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x| = \begin{cases} -\log_a(-x), & x < -1, \\ \log_a(-x), & -1 < x < 0, \\ \log_a x, & x > 0. \end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

2. C

【解析】

试题分析：由零点存在性定理，可知 $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ，即

$$\left(\log_2 \frac{1}{4} + a - 2 \times \frac{1}{4}\right) \left(\log_2 \frac{1}{2} + a - 2 \times \frac{1}{2}\right) = \left(a - \frac{5}{2}\right)(a - 2) < 0, \quad \text{解得 } 2 < a < \frac{5}{2}.$$

考点：函数零点存在性定理的应用.

3. C

【解析】

【分析】

由题意得，当 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ，函数值的极差不大于 6，进而可得答案.

【详解】

\because 二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$, 对称轴 $x = -\frac{b}{2}$,

① $-\frac{b}{2} < -1$ 即 $b > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 递增,

$$f(x)_{\min} = f(-1) = 1 - b + c, f(x)_{\max} = f(1) = 1 + b + c,$$

故 $f(-1) - f(1) = -2b$, $|f(1) - f(-1)| = |2b| \leq 6$ 得 $2 < b \leq 3$,

② $-\frac{b}{2} > 1$ 时, 即 $b < -2$ 时, $|f(1) - f(-1)| = |2b| \leq 6$ 得 $-3 \leq b < -2$,

③ 当 $-1 \leq -\frac{b}{2} \leq 1$, 即 $-2 \leq b \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, -\frac{b}{2}]$ 递减, 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{b}{2}, 1]$ 递增,

$\therefore |f(1) - f(-\frac{b}{2})| \leq 6$, 且 $|f(-1) - f(-\frac{b}{2})| \leq 6$,

即 $|\frac{b^2}{4} + b + 1| \leq 6$, 且 $|\frac{b^2}{4} - b + 1| \leq 6$, 解得: $-3 \leq b \leq 3$, 又 $-2 \leq b \leq 2$,

故 b 的取值范围是 $[-3, 3]$

故选 C.

【点睛】

本题考查的知识点是二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的图象和性质, 是解答的关键, 属于中档题.

4. B

【解析】

【分析】

先求得 $C_R B$, 然后求两个集合的交集.

【详解】

依题意 $C_R B = \{x | x \geq 3\}$, 故 $A \cap (C_R B) = \{3, 4, 5\}$, 故选 B.

【点睛】

本小题主要考查补集、交集的概念和运算，属于基础题。

5. B

【解析】

函数有意义，则： $\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \end{cases}$ ，求解不等式组可得： $4x^2 = 1, \therefore x = \pm \frac{1}{2}$ ，

据此可得函数的定义域为 $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ 。

本题选择 B 选项。

6. C

【解析】

【分析】

根据不等式的恒成立，分类讨论，确定集合 Q ，在根据集合之间的关系，即可求解。

【详解】

当 $m=0$ 时， $-4 < 0$ 对任意实数 x 恒成立；

当 $m \neq 0$ 时，由 $mx^2 + 4mx - 4 < 0$ 对任意实数 x 恒成立可得 $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 16m^2 + 16m < 0 \end{cases}$ ，

解得 $-1 < m < 0$ 。综上所述， $Q = \{m | -1 < m \leq 0\}$ ，所以 $P=Q$ ，故选 C。

【点睛】

本题主要考查了一元二次不等式的恒成立问题的求解及集合关系的判定，其中分类讨论求解一元二次不等式的恒成立问题，得到集合 Q 是解答的关键，着重考查了分类讨论思想和推理、运算能力，属于中档试题。

7. D

【解析】

【分析】

先根据 α 所在的象限，判断出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的取值范围，由此判断出 P 点坐在象限，进而求

得 β 所在象限.

【详解】

由于 α 是第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$, 所以 P 在第四象限, 故 β 为第四象限角.

【点睛】

本小题主要考查三角函数在各个象限的符号, 属于基础题.

8. C

【解析】

【分析】

首先将 b 表示为对数的形式, 判断出 $b < 0$, 然后利用中间值以及对数、指数函数的单调性比较 $\frac{3}{2}$ 与 a, c 的大小, 即可得到 a, b, c 的大小关系.

【详解】

因为 $5^b = \frac{1}{4}$, 所以 $b = \log_5 \frac{1}{4} < \log_5 1 = 0$,

又因为 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_3 4 \in (\log_3 3, \log_3 3\sqrt{3})$, 所以 $a \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$,

又因为 $c = 6^{\frac{1}{3}} \in \left(\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{3}}\right)$, 所以 $c \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$,

所以 $c > a > b$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用指、对数函数的单调性比较大小, 难度一般. 利用指、对数函数的单调性比较大小时, 注意数值的正负, 对于同为正或者负的情况可利用中间值进行比较.

9. C

【解析】

【分析】

化简 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b}) \times 2 \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b}) \times (a+b) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b})$ ，再利用基本不等式求解.

【详解】

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b}) \times 2 \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b}) \times (a+b) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b}) \geq \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}}) = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})$$

当且仅当 $a = 2(\sqrt{2}-1), b = 2(2-\sqrt{2})$ 时取等.

故选：C

【点睛】

本题主要考查利用基本不等式求最值，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

10. A

【解析】

【分析】

根据反比例函数的解析式可得 $xy = 4$ ，由此求得两个矩形的面积，用总面积减去叠加起来的两个阴影部分的面积，求得 $S_1 + S_2$ 的值.

【详解】

\because 点 A, B 是双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上的点，分别经过 A, B 两点向 x 轴、 y 轴作垂线段，则根据反

比例函数的图像的性质得两个矩形的面积都等于 $|k| = 4$ ，所以 $S_1 + S_2 = 4 + 4 - 1 \times 2 = 6$ ，

故选 A.

【点睛】

本小题主要考查反比例函数的图像与性质，考查矩形面积的计算，属于基础题.

11. -2

【解析】

试题分析： $\vec{a} - \vec{b} = (2-x, 2)$ ，由 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 \vec{b} 共线得 $2x = -(2-x)$ ，解得 $x = -2$.

考点：向量的共线.

12. 5

【解析】

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{10}} = a^5, m = 5$$

13. (2) (3)

【解析】

【分析】

根据题意知图像反应了收支差额 y 与乘客量 x 的变化情况，即直线的斜率说明票价问题；当 $x=0$ 的点说明公司的成本情况，再结合图像进行说明。

【详解】

根据题意和图②知，两直线平行即票价不变，直线向上平移说明当乘客量为 0 时，收入是 0 但是支出变少了，即说明了此建议是降低成本而保持票价不变，故 (2) 正确；

由图③看出，当乘客量为 0 时，支出不变，但是直线的倾斜角变大，即相同的乘客量时收入变大，即票价提高了，即说明了此建议是提高票价而保持成本不变，故 (3) 正确。

故答案为 (2) (3)

【点睛】

本题考查用函数图像说明两个量之间的变化情况，主要根据实际意义进行判断，考查了读图能力和数形结合思想，解题关键是对图形的理解。

14. -1.

【解析】

【分析】

利用多项式乘法化简复数的分子，即可得出结果。

【详解】

$$\text{复数} \frac{(1+2i)^2}{3-4i} = \frac{-3+4i}{3-4i} = \frac{-(3-4i)}{3-4i} = -1.$$

故答案为-1

【点睛】

本题考查了复数的运算法则，属于基础题。

15. 5

【解析】

【分析】

当 $x - 2 = 0$ 时，函数值域与 a 没有关系，由此求得恒过的定点 (m, n) ，并求得表达式的值。

【详解】

当 $x - 2 = 0$ ，即 $x = 2$ 时，函数值域与 a 没有关系，此时 $y = 3$ ，故函数过定点 $(2, 3)$ ，即 $m = 2$ ， $n = 3$ ，所以 $m + n = 2 + 3 = 5$ 。

【点睛】

本小题主要考查指数函数横过定点的问题，当指数函数底数为 0 的时候， $a^0 = 1$ ，由此求得恒过的定点，属于基础题。

16. (1) $m = -1$ (2) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数，证明见解析 (3) $f(x)_{\min} = \frac{4}{3} + m$

【解析】

试题分析：(1) 由 $x \in R$ ，函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0) = 0$ ，或根据奇函数的定义可求实数 m 的值；(2) 利用函数单调性的定义，计算 $f(x_1) - f(x_2)$ ，判断其符号正负，即可判断并证明 $f(x)$ 在 R 上的单调性；(3) 由 (2) 易得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的最小值。

试题解析：(1) 法一：由函数 $f(x)$ 为奇函数，得 $f(0) = 0$ 即 $m + 1 = 0$ ，

所以 $m = -1$

法二：因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

即 $f(-x) + f(x) = 0$

$$\therefore f(-x) + f(x) = \left(m + \frac{2}{2^{-x} + 1}\right) + \left(m + \frac{2}{2^x + 1}\right) = 2m + \left(\frac{2}{\frac{1}{2^x} + 1} + \frac{2}{2^x + 1}\right)$$

$$= 2m + \left(\frac{2 \cdot 2^x}{1 + 2^x} + \frac{2}{2^x + 1}\right) = 2m + \frac{2 \cdot (2^x + 1)}{1 + 2^x} = 2m + 2 = 0,$$

所以 $m = -1$

(2) 证明: 任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 < x_2$

则

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(m + \frac{2}{2^{x_1} + 1}\right) - \left(m + \frac{2}{2^{x_2} + 1}\right) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} = \frac{2 \cdot (2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_1} + 1) \cdot (2^{x_2} + 1)}$$

$\because x_1 < x_2, \therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, \therefore 2^{x_2} + 1 > 0, \therefore 2^{x_1} + 1 > 0,$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2)$$

所以, 对任意的实数 m , 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数

(3) \because 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上为减函数,

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f(-1) = \frac{4}{3} + m$$

考点: 函数的单调性, 奇偶性, 以及函数的最值

$$17. (1) y = \begin{cases} 30x, & 0 < x \leq 24 \\ 62x - \frac{4}{3}x^2, & 24 < x \leq 30 \end{cases}, \text{ 定义域 } D = (0, 30] \quad (2) \text{ 先在 } DE \text{ 上截取线段}$$

$DM = \frac{93}{4} \text{ cm}$, 然后过点 M 作 DE 的垂线交 BA 于点 P , 再过点 P 作 DE 的平行线交 DC 于点 N , 最后沿 MP 与 PN 截铁皮, 所得矩形面积最大.

【解析】

【分析】

(1) 分类讨论, 当点 P 分别落在线段 CB 或线段 BA 上. 根据矩形面积即可求得 y 关于 x 的函数解析式及其定义域.

(2) 根据 (1) 由分段函数, 结合二次函数的性质可求得面积的最大值. 求得取最大值时 x 的值, 即可知截取矩形的方式.

【详解】

(1) 依据题意并结合图形, 可知:

①当点 P 落在线段 CB 上

即 $0 < x \leq 24$ 时, $y = 30x$;

②当点 P 在线段 BA 上,

即 $24 < x \leq 30$ 时,由 $\frac{PQ}{QA} = \frac{BF}{FA}$,

得 $QA = 40 - \frac{4}{3}x$.

于是 $y = DM \cdot PM = DM \cdot EQ = 62x - \frac{4}{3}x^2$.

所以 $y = \begin{cases} 30x, & 0 < x \leq 24 \\ 62x - \frac{4}{3}x^2, & 24 < x \leq 30 \end{cases}$

定义域 $D = (0, 30]$.

(2) 由 (1) 知,当 $0 < x \leq 24$ 时, $0 < y \leq 720$;

当 $30 < x \leq 40$ 时, $y = 62x - \frac{4}{3}x^2 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{93}{4}\right)^2 + \frac{2883}{4} \leq \frac{2883}{4}$

当且仅当 $x = \frac{93}{4}$ 时,等号成立.

因此, y 的最大值为 $\frac{2883}{4}$.

答: 先在 DE 上截取线段 $DM = \frac{93}{4}cm$, 然后过点 M 作 DE 的垂线交 BA 于点 P , 再过点 P 作 DE 的平行线交 DC 于点 N , 最后沿 MP 与 PN 截铁皮, 所得矩形面积最大, 最大面积为 $\frac{2883}{4}cm^2$.

【点睛】

本题考查了分段函数在实际问题中的应用, 根据二次函数的性质求得最大值, 属于基础题.

18. (I) $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$

(II) 函数 $f(x)$ 的最大值为 2, 相应的 x 的集合为 $\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$

单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in Z$

【解析】

试题分析: (I) 化简可得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 即可求出 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 和函数 $f(x)$ 的最小正

周期; (II) 由 (I) 知 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 函数 $f(x)$ 的最大值为 2, 由

$2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z$ 可得 $f(x)$ 的单调递减区间.

试题解析: 解: (I) $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

相应的 x 的集合为 $\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z\right\}$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z$$

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in Z$.

考点: 1. 三角恒等变换; 2. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质.

19. 当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -1\}$;

当 $a > 0$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq -1\}$ ；

当 $-2 < a < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq -1\}$ ；

当 $a = -2$ 时，不等式的解集为 $\{-1\}$ ；

当 $a < -2$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\}$ 。

【解析】

【分析】

将原不等式因式分解化为 $(ax-2)(x+1) \geq 0$ ，对参数 a 分 5 种情况讨论： $a = 0$ ， $a > 0$ ， $-2 < a < 0$ ， $a = -2$ ， $a < -2$ ，分别解不等式。

【详解】

解：原不等式可化为 $ax^2 + (a-2)x - 2 \geq 0$ ，即 $(ax-2)(x+1) \geq 0$ ，

①当 $a = 0$ 时，原不等式化为 $x+1 \leq 0$ ，解得 $x \leq -1$ ，

②当 $a > 0$ 时，原不等式化为 $(x - \frac{2}{a})(x+1) \geq 0$ ，

解得 $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$ ，

③当 $a < 0$ 时，原不等式化为 $(x - \frac{2}{a})(x+1) \leq 0$ 。

当 $\frac{2}{a} > -1$ ，即 $a < -2$ 时，解得 $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$ ；

当 $\frac{2}{a} = -1$ ，即 $a = -2$ 时，解得 $x = -1$ 满足题意；

当 $\frac{2}{a} < -1$ ，即 $-2 < a < 0$ 时，解得 $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$ 。

综上所述，当 $a = 0$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -1\}$ ；

当 $a > 0$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq -1\}$ ；

当 $-2 < a < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq -1\}$ ；

当 $a = -2$ 时，不等式的解集为 $\{-1\}$ ；

当 $a < -2$ 时，不等式的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\}$ 。

【点睛】

本题考查含参不等式的求解，求解时注意分类讨论思想的运用，对 a 分类时要做到不重不漏的原则，同时最后记得把求得的结果进行综合表述。

20. (1) $[1,4]$ ；(2) $x = 4$ 时，函数有最大值 13。

【解析】

【分析】

(1) 由已知 $f(x)$ 的定义域及复合函数的定义域的求解可知， $\begin{cases} 1 \leq x \leq 16 \\ 1 \leq x^2 \leq 16 \end{cases}$ ，解不等式可求

(2) 由已知可求 $g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$ ，结合二次函数的性质可求函数 $g(x)$ 的最值及相应的 x 。

【详解】

解：(1) $\because f(x) = 2 + \log_4 x, x \in [1,16], g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 。

由题意可得， $\begin{cases} 1 \leq x \leq 16 \\ 1 \leq x^2 \leq 16 \end{cases}$ ，

解可得， $1 \leq x \leq 4$

即函数 $g(x)$ 的定义域 $[1,4]$ ；

(2) $\because f(x) = 2 + \log_4 x, x \in [1,16]$ ，

$\therefore g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2) = (2 + \log_4 x)^2 + 2 + \log_4 x^2 = \log_4^2 x + 6 \log_4 x + 6$

设 $t = \log_4 x$, 则 $t \in [0, 1]$,

而 $g(t) = t^2 + 6t + 6 = (t+3)^2 - 3$ 在 $[0, 1]$ 单调递增,

当 $t=1$, 即 $x=4$ 时, 函数有最大值 13.

【点睛】

本题主要考查了对数函数的性质, 二次函数闭区间上的最值求解, 及复合函数的定义域的求解, 本题中的函数 $g(x)$ 的定义域是容易出错点.

21. (1) $-\frac{7}{4} < a < 3$. (2) $(-\frac{7}{4}, -1] \cup [3, 5)$.

【解析】

试题分析: (1) 由命题 q 为真, 则 $\begin{cases} f(1-) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$, 即可求解实数 a 的取值范围.

(2) 根据 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 得 p, q 中一真一假, 分类讨论即可求解实数 a 的取值范围.

试题解析:

(1) 函数 $f(x)$ 是增函数, 所以若 q 为真, 则 $\begin{cases} f(1-) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{7}{4} < a < 3$.

(2) 若 p 为真, 则 $a^2 - 4\left(a + \frac{5}{4}\right) < 0$, 即 $a^2 - 4a + 5 < 0$, 解得 $-1 < a < 5$,

因为 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 所以 p, q 中一真一假,

若 p 真 q 假, 则 $3 \leq a < 5$;

若 p 假 q 真, 则 $-\frac{7}{4} < a \leq -1$,

综上, a 的取值范围是 $(-\frac{7}{4}, -1] \cup [3, 5)$.