高 20 级调研试卷

数学

（高 20 级）2023. 05

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{x\mid(x+1)(x-2)>0\}$，则 $\complement_{R}A=$

(A) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　(B) $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

(C) $(-1,2)$　　(D) $[-1,2]$

(2) 在复平面内，复数 z_1 的对应点为 $(1,1)$，复数 z_2 的对应点与复数 z_1 的对应点关于 x 轴对称，

则 $z_1z_2=$

(A) 2　　(B) -2　　(C) $2i$　　(D) $-2i$

(3) 若 $(2-x)^n$ 的展开式中常数项为 32，则含 x^3 项的系数为

(A) -40　　(B) -10　　(C) 10　　(D) 40

(4) 已知函数 $f(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}$，则对于任意的 $x\in R$，总有

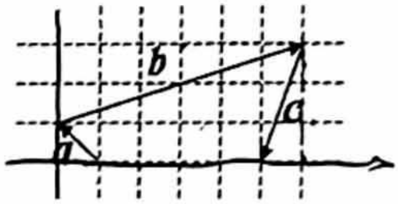
(A) $f(-x)+f(x)=0$　　(B) $f(-x)+f(x)=2$

(C) $f(-x)-f(x)=0$　　(D) $f(-x)-f(x)=2$

(5) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和记为 S_n，若 $S_4=0$，$a_2+a_4=2$，则 $S_{10}=$

(A) 80　　(B) 70　　(C) 60　　(D) 50

(6)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示.若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$



(A) -3　　(B) -4

(C) 3　　(D) 4

(7) 已知双曲线 C 的焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，且 $|F_1F_2|=4\sqrt{2}$，点 P 是 C 上一点，且

$||PF_1|-|PF_2||=2$，则 C 的标准方程为

(A) $x^2-\dfrac{y^2}{7}=1$　　(B) $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$

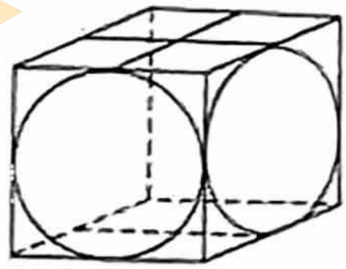
(C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

(8) “$\sin 2\alpha=\sin\alpha$” 是 “存在 $k\in Z$，$\alpha=k\pi$” 的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

(9) 刘徽在他的《九章算术注》中提出一个独特的方法来计算球体的体积：他不直接给出球体的体积，而是先计算另一个叫“牟合方盖”的立体的体积．正方体的棱长均为 $2r$，r 为球的半径，刘徽通过计算，“牟合方盖”的体积与球的体积之比应为 $\frac{4}{\pi}$．后人导出了“牟合方盖”的 $\frac{1}{8}$ 体积计算公式，即 $\frac{1}{8}V_{牟}=r^3-V_{方盖差}$，从而计算出 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$．记所有棱长都为 1 的正四棱锥的体积为 $V_{正}$，棱长为 2 的正方体的方盖差为 $V_{方盖差}$，则 $\frac{V_{方盖差}}{V_{正}}=$



(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

(10) 已知 M 为圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上一点，N 为圆 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 上一点，则 $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$ 的最大值为

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) 2　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 1

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题 共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 已知抛物线 $G:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $A(3,a)$ 在 G 上，且 $|AF|=5$，则 $p=$____.

(12) 在△ABC 中，$a=3$，$b=2$，$A=60^\circ$，则 $\sin B=$______；△ABC 的面积为______

(13) 已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)-\log_2(x+2)$，则不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集为______

(14) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-2, x<a,\\ \cos 2x, x\ge a\end{cases}$ 有最小值，则 a 的一个取值为______.

(15) 为了让某大型自然语言处理模型 app 能够正确地问答问题，需要进行大量自我迭代训练. 每次迭代后，系统回答问题的正确率可能发生变化. 该 app 初始回答问题的正确率记为 p_0，设第 n 次迭代后，可将该 app 回答问题的正确率从 p_{n-1} 改变为 p_n，其中，$p_n=p_{n-1}(1-\beta_n)+\alpha_n(1-p_{n-1})$，$0<\alpha_n\le 1, 0\le\beta_n<1$. 给出下列四个命题:

①: 若 $\alpha_1=1$，$\beta_1=\frac{1}{10}$，则必有 $p_1>p_0$；

② 若对任意的 $n\in N_+,\alpha_n=\alpha$，$\beta_n=0$， 则存在 $n\in\mathrm{N}^*$，$p_n>\frac{99}{100}$；

③ 若 $\alpha_n=\alpha$，$\beta_n=\beta$ 为常数，且 $p_1>p_0$，则 $\{p_n\}$ 必为递增数列；

④ 若 $\frac{1}{3}<p_0<\frac{2}{3}$，对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$，都有 $\alpha_n=2\beta_n$，则任意的 $n\in\mathrm{N}^*$，都有 $p_n<\frac{5}{6}$.

其中全部正确命题的序号为__________.

三、解答题 共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

设函数 $f(x)=2\sin x\cos x+A\cos 2x$，$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2})$ 上单调.

从① $f(\frac{\pi}{2})=1$；② $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$；③ $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

这三个条件中任选一个，作为题目的已知条件，

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式和单调增区间；

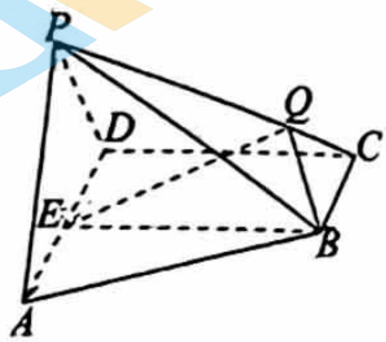
（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=1$ 交点间的最短距离.

(17) (本小题 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，ΔPAD 为等边三角形，$AD\perp CD$，$AD//BC$，且 $AD=2BC=4$，$CD=2\sqrt{3},PB=2\sqrt{6}$，$E$ 为 AD 中点.

(Ⅰ)求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(Ⅱ)已知 Q 为线段 PC 上一点，且 $CQ=\frac{1}{4}CP$，求二面角 $Q-BE-C$ 的大小.



(18) (本小题 14 分)

某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二、方案三. 为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	378 人	222 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人
方案三	400 人	200 人	200 人	200 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

(Ⅰ) 分别估计该校男生中支持方案三的概率，该校女生中支持方案三的概率；

(Ⅱ) 从该校全体男生中随机抽取 1 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 3 人中恰有 X 人支持方案三，估计 X 的分布列及数学期望；

(Ⅲ) 将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0，假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小.（结论不要求证明）

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，离心率 $e=\frac{1}{2}$，且 $|AF|=3$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的标准方程；

(Ⅱ) 点 P 是椭圆 E 上一动点，且不在 x 轴上，直线 AP 与 y 轴交于点 N，线段 AP 的中点为 M，直线 OM 与直线 PF 的交点为 Q，$T(6,0)$，判断直线 QT 与直线 QN 的斜率之积是否为定值，说明理由.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x(e^x-1)$.

(Ⅰ) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅲ) 若对于任意的 $x\in[-a,a]$，总有 $f(x)\le\ln2$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(21)(本小题 15 分)

已知集合 $B=\{-n,1-n,\cdots,-1,0,1,2,3,\cdots,n\}$，整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}(m\ge1)$，若对任意的 $b\in B$，都存在 $a_i,a_j\in A$，使得 $b=c_1a_i+c_2a_j$（其中 $c_1,c_2=-1,0,1$），则称集合 A 为集合 B 的一个 m 元生成集.

(Ⅰ) 分别判断下列集合 A 是否为集合 B 的一个生成集，并说明理由：

① $A=\{1,4\}$，$B=\{-5,-4,-3,\cdots,0,1,2,3,4,5\}$；

② $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{-10,-9,-8,\cdots,8,9,10\}$.

(Ⅱ) 若集合 $A=\{1,a_2,a_3\}$ 是集合 $B=\{-n,1-n,\cdots,n-1,n\}$ 的一个 3 元生成集，求 n 的最大值.

(Ⅲ) 若集合 A 为集合 $B=\{-19,-18,-17,\cdots,18,19\}$ 的一个 m 元基底，求出 m 的最小可能值，并写出当 m 取最小值时 B 的一个基底 A.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。