2019 北京海淀高三（上）期末

数　　学（文）

2019.01

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的左焦点的坐标为

（A）$(-2,0)$　　（B）$(-\sqrt{2},0)$　　（C）$(-1,0)$　　（D）$(-4,0)$

（2）已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $a_1,a_2,6$ 成等差数列，则 $a_4=$

（A）6　　（B）8　　（C）16　　（D）32

（3）若 $\lg a-2\lg 2=1$，则 $a=$

（A）4　　（B）10　　（C）20　　（D）40

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0),\boldsymbol{b}=(t,1)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$

（A）$(1,1)$　　（B）$(1,-1)$　　（C）$(-1,1)$　　（D）$(-1,-1)$

（5）直线 $y=kx+1$ 被圆 $x^2+y^2=2$ 截得的弦长为 2，则 k 的值为

（A）0　　（B）$\pm\frac{1}{2}$　　（C）± 1　　（D）$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

（6）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{a}{x}$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数 $f(x)=\sin x-\cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则下列结论中正确的是

（A）函数 $f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域不同

（B）存在 x_0，使得函数 $f(x)$ 和 $\mathrm{g}(x)$ 都在 x_0 处取得最值

（C）把函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，就可以得到函数 $g(x)$ 的图象

（D）函数 $f(x)$ 和 $\mathrm{g}(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上都是增函数

（8）已知集合 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{(s,t)\,|\,s\in I,t\in I\}$．若 $B\subseteq A$，且对任意的 $(a,b)\in B,(x,y)\in B$，均有 $(a-x)(b-y)<0$，则集合 B 中元素个数的最大值为

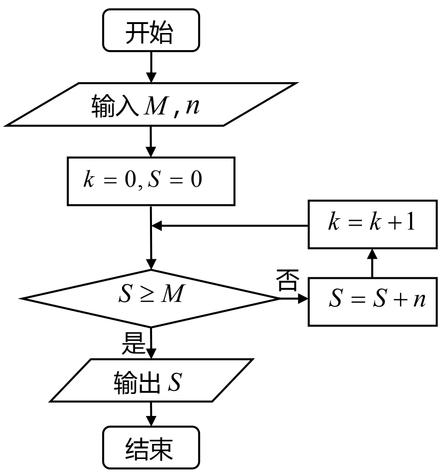
（A）5　　（B）6　　（C）11　　（D）13

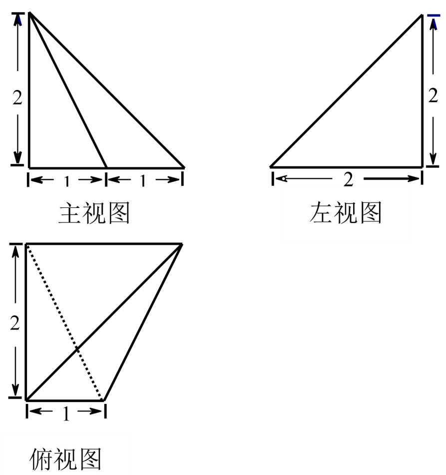
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线方程为________.

（10）执行如图所示的程序框图，当输入的 M 值为 7，n 值为 2 时，输出的 S 值为________.





（11）某三棱锥的三视图如上图所示，则这个三棱锥的体积是________.

（12）在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，且$\sin 2A=\sin B$，则$\cos A=$ ________，$\angle C=$________.

（13）设关于x,y的不等式组$\begin{cases} y\le x, \\ x\le 4, \\ y\ge kx-2 \end{cases}$表示的平面区域为$\Omega$，若$A(1,-2),B(3,0),C(2,-3)$中有且仅有两个点在$\Omega$内，则$k$的最大值为 ________.

（14）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{|x-t|}$，$g(x)=-x+\mathrm{e}$，$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，其中$\max\{a,b\}$表示a,b中最大的数.

（Ⅰ）若$t=1$，则$h(0)=$________；

（Ⅱ）若$h(x)>\mathrm{e}$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则t的取值范围是________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\ge 2)$.

（Ⅰ）求a_2,a_3,a_4的值和$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=2\log_2 a_n-1$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

（16）（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=a\sin x-\cos 2x$.

（Ⅰ）比较$f(\dfrac{\pi}{6}),\ f(\dfrac{\pi}{2})$的大小；

（Ⅱ）当$a=-6$时，求函数$f(x)$的最小值.

（17）（本小题满分 13 分）

为迎接2022年冬奥会，北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核．记 X 表示学生的考核成绩，并规定 $X \geq 85$ 为考核优秀. 为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了30名学生的考核成绩，并作成如下茎叶图：

5	0	1	1	6				
6	0	1	4	3	3	5	8	
7	2	3	7	6	8	7	1	7
8	1	1	4	5	2	9		
9	0	2	1	3	0			

(Ⅰ）从参加培训的学生中随机选取 1 人，请根据图中数据，估计这名学生考核成绩为优秀的概率；

(Ⅱ)从图中考核成绩满足 $X \in [80,89]$ 的学生中任取 2 人，求至少有一人考核优秀的概率；

(Ⅲ)记 $P(a \leq X \leq b)$ 表示学生的考核成绩在区间 $[a,b]$ 内的概率，根据以往培训数据，规定当 $P\left(\left|\frac{X-85}{10}\right| \leq 1\right) \geq 0.5$ 时培训有效．请你根据图中数据，判断此次中学生冰雪培训活动是否有效，并说明理由.

（18）（本小题满分 14 分）

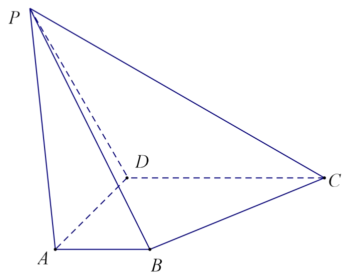
在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD， 底面 $ABCD$ 为梯形， $AB \parallel CD$， $AD \perp DC$.

(Ⅰ）求证： $AB \parallel$ 平面 PCD；

(Ⅱ）求证： $AD \perp$ 平面 PCD；

(Ⅲ）若 M 是棱 PA 的中点，求证：对于棱 BC 上任意一点 F，

MF 与 PC 都不平行.



（19）（本小题满分 14 分）

已知点 $B(0,-2)$ 和椭圆 $M:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 直线 $l:y=kx+1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P,Q.

（Ⅰ）求椭圆 M 的离心率；

（Ⅱ）当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，求 ΔPBQ 的面积；

（Ⅲ）设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C，当 C 为 PB 中点时，求 k 的值 .

（20）（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a-x^2}{\mathrm{e}^x}$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A　　2. C　　3. D　　4. B　　5. A　　6. C　　7. C　　8. B

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $x=-1$　　10. 8　　11. $\dfrac{4}{3}$

12. $\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}$　　13. 0　　14. e，$t<-1$

说明:第 11，14 题第一空 3 分，第二空 2 分

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：（Ⅰ）因为 $a_1=2$， $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\ge 2)$

所以 $a_2=a_1+2=4$， $a_3=a_2+4=8$， $a_4=a_3+8=16$

因为 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\ge 2)$

$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$

$a_{n-2}-a_{n-3}=2^{n-3}$

……

$a_3-a_2=2^2$

$a_2-a_1=2^1$

把上面 $n-1$ 个等式叠加，得到

$a_n-a_1=2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-2$

所以 $a_n=2^n(n\ge 2)$

又 $n=1$ 时， $a_1=2$ 符合上式，所以 $a_n=2^n$

（Ⅱ）因为 $b_n=2\log_2 a_n-1=2\log_2 2^n-1=2n-1$

所以 $b_n-b_{n-1}=(2n-1)-(2n-3)=2$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1=1$，公差为 2 的等差数列

所以 $S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=n^2$

16．解：（Ⅰ）因为 $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2},f(\dfrac{\pi}{2})=a+1$

所以 $f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{6})=(a+1)-(\frac{a}{2}-\frac{1}{2})=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}$

当 $a=-3$ 时，$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{6})$

当 $a>-3$ 时，$f(\frac{\pi}{2})>f(\frac{\pi}{6})$

当 $a<-3$ 时，$f(\frac{\pi}{2})<f(\frac{\pi}{6})$

（Ⅱ）当 $a=-6$ 时，

$$f(x)=-6\sin x-\cos 2x$$

$$=-6\sin x-(1-2\sin^2 x)$$

$$=2\sin^2 x-6\sin x-1$$

$$=2(\sin x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$$

设 $t=\sin x$, 所以 $t\in[-1,1]$

所以 $y=2(t-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$，其对称轴为 $t=\frac{3}{2}$

因为 $t=\frac{3}{2}>1$，

所以当 $t=1$ 时，函数取得最小值 -5.

17. 解：（Ⅰ）设这名学生考核优秀为事件 A

由茎叶图中的数据可以知道，30 名同学中，有 7 名同学考核优秀

所以所求概率 $P(A)$ 约为 $\frac{7}{30}$

（Ⅱ）设从图中考核成绩满足 $X\in[80,89]$ 的学生中任取 2 人，至少有一人考核成绩优秀为事件 B

因为表中成绩在$[80,89]$的6人中有2个人考核为优

所以基本事件空间Ω包含15个基本事件，事件B包含9 个基本事件

所以$P(B)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

（III）根据表格中的数据，满足$\left|\frac{X-85}{10}\right|\le 1$的成绩有16个，

所以$P\left(\left|\frac{X-85}{10}\right|\le 1\right)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}>0.5$

所以可以认为此次冰雪培训活动有效

18．证明：

（Ⅰ）因为$AB \parallel CD$

$CD \subset$平面PCD

$AB \not\subset$平面PCD

所以$AB \parallel$平面PCD

（Ⅱ）**法一：**

因为平面$ABCD \perp$平面PCD

平面$ABCD \cap$平面$PCD = CD$

$AD \perp CD$，$AD \subset$平面$ABCD$

所以$AD \perp$平面PCD

法二：

在平面PCD中过点D作$DH \perp CD$，交PC于H

因为平面$ABCD \perp$平面PCD

平面$ABCD \cap$平面$PCD = CD$

$DH \subset$ 平面 PCD

所以 $DH \perp$ 平面 $ABCD$

因为 $AD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $DH \perp AD$

又 $AD \perp PC$， $PC \cap DH = H$

所以 $AD \perp$ 平面 PCD

（III）**法一：**

假设存在棱 BC 上点 F，使得 $MF // PC$

连接 AC，取其中点 N

在 ΔPAC 中，因为 M,N 分别为 PA,CA 的中点，所以 $MN // PC$

因为过直线外一点只有一条直线和已知直线平行，所以 MF 与 MN 重合

所以点 F 在线段 AC 上，所以 F 是 AC， BC 的交点 C

即 MF 就是 MC

而 MC 与 PC 相交，矛盾，所以假设错误，问题得证

法二：

假设存在棱 BC 上点 F，使得 $MF // PC$，显然 F 与点 C 不同

所以 P,M,F,C 四点在同一个平面 α 中

所以 $FC \subset \alpha$， $PM \subset \alpha$

所以 $B \in FC \subset \alpha$， $A \in PM \subset \alpha$

所以 α 就是点 A,B,C 确定的平面 $ABCD$ ，且 $P \in \alpha$

这与 $P-ABCD$ 为四棱锥矛盾，所以假设错误，问题得证

19．解：（Ⅰ）

因为$a^2=4,b^2=2$，所以$a=2,b=\sqrt{2},c=\sqrt{2}$

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（Ⅱ）设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

若$k=\dfrac{1}{2}$，则直线l的方程为$y=\dfrac{1}{2}x+1$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+1\end{cases}$，得$3x^2+4x-4=0$

解得 $x_1=-2,x_2=\dfrac{2}{3}$

设$A(0,1)$，则 $S_{\Delta PBQ}=\dfrac{1}{2}|AB|(|x_1|+|x_2|)=\dfrac{1}{2}\times3\times(\dfrac{2}{3}+2)=4$

（Ⅲ）法一：

设点$C(x_3,y_3)$，

因为$P(x_1,y_1)$，$B(0,-2)$，所以$\begin{cases}x_3=\dfrac{x_1}{2}\\ y_3=\dfrac{-2+y_1}{2}\end{cases}$

又点$P(x_1,y_1)$，$C(x_3,y_3)$都在椭圆上，

所以$\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{4}+\dfrac{{y_1}^2}{2}=1\\ \dfrac{(\frac{x_1}{2})^2}{4}+\dfrac{(\frac{-2+y_1}{2})^2}{2}=1\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\y_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\y_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以 $k=-\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$或$k=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$

法二：

设$C(x_3,y_3)$

显然直线PB有斜率，设直线PB的方程为$y=k_1x-2$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\y=k_1x-2\end{cases}$， 得 $(2k_1^{\ 2}+1)x^2-8k_1x+4=0$

所以$\begin{cases}\Delta=16(2k_1^{\ 2}-1)>0\\x_1+x_3=\dfrac{8k_1}{2k_1^{\ 2}+1}\\x_1x_3=\dfrac{4}{2k_1^{\ 2}+1}\end{cases}$

又$x_3=\dfrac{1}{2}x_1$

解得$\begin{cases}x_1=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\k_1=-\dfrac{3\sqrt{14}}{14}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\k_1=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}\end{cases}$

所以$\begin{cases}x_1=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\y_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\\y_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以 $k=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$ 或 $k=-\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$

20．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{a-x^2}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-a}{\mathrm{e}^x}$

当 $a=3$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(-1)=0$，而 $f(-1)=2\mathrm{e}$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=2\mathrm{e}$

（Ⅱ）法一：

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-a}{\mathrm{e}^x}$，令 $f'(x)=0$

得 $x_1=1-\sqrt{1+a}$，$x_2=1+\sqrt{1+a}$

显然当 $a>0$ 时，$x_1<0$，$x_2>2$

所以 x，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下表：

x	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	]	极小值	Z

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(x_2)$，所以只需证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

因为$x_2^{\ 2}-2x_2-a=0$，所以$f(x_2)=\dfrac{a-x_2^{\ 2}}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$

设$F(x)=\dfrac{-2x}{\mathrm{e}^x}$，其中$x>2$

所以$F'(x)=\dfrac{-2(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{2(x-1)}{\mathrm{e}^x}$

当$x>2$时，$F'(x)>0$，所以$F(x)$在区间$(2,+\infty)$单调递增，

因为 $x_2>2$，所以$f(x_2)=F(x_2)>F(1)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，问题得证

法二：

因为$a>0$，所以当$x>0$时，$f(x)=\dfrac{a-x^2}{\mathrm{e}^x}>\dfrac{-x^2}{\mathrm{e}^x}$

设$F(x)=\dfrac{-x^2}{\mathrm{e}^x}$，其中$x>0$

所以$F'(x)=\dfrac{x^2-2x}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{x(x-2)}{\mathrm{e}^x}$

所以x，$F'(x)$，$F(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	]	极小值	Z

所以$F(x)$在区间$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，

所以函数$F(x)$在$x=2$时取得最小值$F(2)=-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，而$-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}-(-\dfrac{2}{\mathrm{e}})=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}^2}>0$

所以 $x>0$ 时 $F(x)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

所以 $f(x)>F(x)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，问题得证

法三：

因为“对任意的 $x>0$，$\dfrac{a-x^2}{\mathrm{e}^x}>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$”等价于“对任意的 $x>0$，$\dfrac{a-x^2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}}>0$”

即“$x>0$，$\dfrac{2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(a-x^2)}{\mathrm{e}^{x+1}}>0$”，故只需证“$x>0$时，$2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(a-x^2)>0$”

设 $g(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(a-x^2)$，其中 $x\geq 0$

所以 $g'(x)=2\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}x$

设 $h(x)=g'(x)$，$h'(x)=2\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$

所以 x，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	]	极小值	Z

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，而 $h(1)=2\mathrm{e}-2\mathrm{e}=0$

所以 $h(x)\geq 0$

所以 $x>0$时，$g'(x)\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$，所以 $g(x)>0$ 问题得证

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao