

2023~2024 学年度第一学期四校联考（二）

数学试卷

命题学校：东莞市第六高级中学 命题：周国真 审题：王蔷薇

说明：本试卷共 4 页，22 道题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。

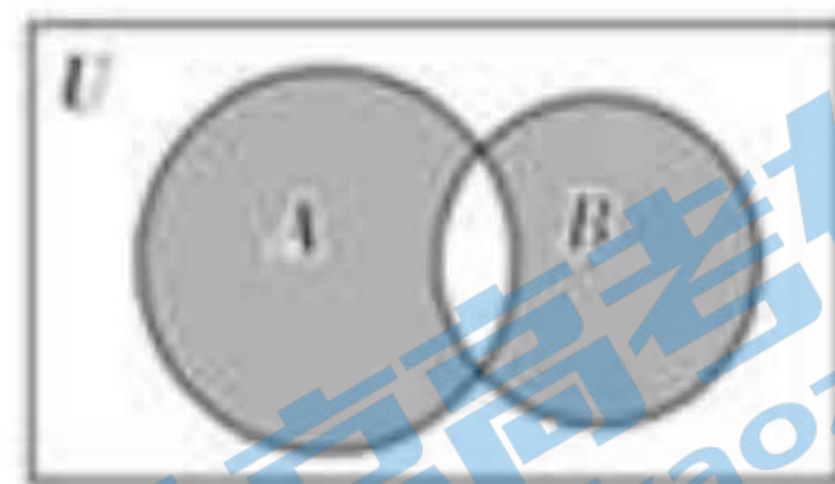
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x | x^2 - x > 0\}$ ，则图中的阴影部分表示的集合为

- A. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$
C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 2\}$



2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_8 = 6$ ， $a_{11} = 0$ ，则 $a_2 =$ ()

- A. 16 B. 18 C. 20 D. 22

3. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则 $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

4. 设 S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_{2023} = 2023$ ，则 $\frac{1}{a_4} + \frac{4}{a_{2020}}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 9 D. $\frac{9}{2}$

5. 命题 “ $\forall 1 \leq x \leq 2, x^2 - a \leq 0$ ” 为真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \geq 4$ B. $a \geq 5$ C. $a \leq 4$ D. $a \leq 5$

试卷第 1 页，共 5 页

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)\ln x + f(x) > 0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数), 若 $a = f(e^{\frac{1}{2}})$, $b = f(e)$, $c = f(e^2)$, 则下列选项中正确的是()

- A. $4c < 2b < a$ B. $2b < 4c < a$ C. $a < 2b < 4c$ D. $a < 4c < 2b$

7. 若函数 $f(x) = x^2 + 3x + 1 + ke^x$ 恰有两个零点, 则实数 k 的取值范围为()

- A. $(-\frac{5}{e}, 0]$ B. $(e^2, +\infty)$ C. $[0, e^2) \cup \{-\frac{5}{e}\}$ D. $(-\infty, -\frac{5}{e}) \cup \{0\}$

8. 若直角坐标平面内 A, B 两点满足: ①点 A, B 都在函数 $f(x)$ 的图象上; ②点 A, B 关于原点对称, 则称点 (A, B) 是函数 $f(x)$ 的一个“姊妹点对”, 点对 (A, B) 与 (B, A) 可看作是同一个“姊妹点对”. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax-1 & (x \leq 0) \\ \ln x & (x > 0) \end{cases}$ 恰有两个“姊妹点对”, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $0 < a \leq e^{-2}$ B. $0 < a < e^{-2}$ C. $0 < a < e^{-1}$ D. $0 < a \leq e^{-1}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是()

- A. 若 $a < b$, 则 $a^2 < b^2$ B. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则 $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$
C. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$, 则 $a + b = -10$
D. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$ 在区间 $(3m-2, m+2)$ 内单调递增, 则实数 m 的取值范围为 $[\frac{4}{3}, 3]$

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且对任意不小于 2 的正整数 n , $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \dots + \frac{1}{n-1}a_{n-1} = a_n$ 恒成立, 则下列结论正确的是()

- A. $a_n = n(n \in \mathbb{N}^*)$ B. $a_{10} = 5$ C. a_2, a_4, a_8 成等比数列 D. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n^2 + n + 2}{4}$

11. 下列四个命题中, 错误的是()

A. “ $m \leq 1$ ”是“关于 x 的方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个实数解”的必要不充分条件

B. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定是: “对 $\forall x \notin \mathbf{R}$, 均有 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”

C. 若 $x > 0$, 则函数 $y = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 的最小值是 2

D. 若函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = -1$ 有极值 0, 则 $a = 2, b = 9$ 或 $a = 1, b = 3$.

12. 已知 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 和 $g(x) = \ln x + x - 2$ 的零点, 则 ()

A. $x_1 + x_2 = 2$ B. $e^{x_1} + \ln x_2 = 2$ C. $x_1 x_2 > \frac{\sqrt{e}}{2}$ D. $x_1^2 + x_2^2 < 3$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n, n \in \mathbf{N}^*$. 若其前 k 项和为 126, 则 $k =$ _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 当 $-2 < x \leq 2$ 时 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2 \\ |x + \frac{1}{2}|, & -2 < x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-5)) =$ _____.

15. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0, f(k \cdot 2^x) + f(4^{x+1} - 8^x - 2^x) > 0$ 对任意 $x \in [-1, 2]$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 _____.

16. 函数 $f(x) = x^2 - ax \ln x$ 在 $(\frac{2}{e}, 2)$ 上不单调, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分)

已知曲线 $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + bx + 1$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 3, 且当 $x = 3$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极值.

(1) 求函数在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程; (2) 求函数的极值;

试卷第 3 页, 共 5 页

(3) 若存在 $x \in [0, 3]$, 使得不等式 $f(x) - m \leq 0$ 成立, 求 m 的取值范围.

18. (本小题 12 分)

已知角 θ 的终边上一点 $p(1, y)$, 且 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(1) 求 $\tan \theta$ 的值; (2) 求 $\frac{\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) - \cos(-\theta - \pi)}{\sin(\pi - \theta) + \cos(\theta + \pi)}$ 的值.

(3) 若 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin(\alpha + \theta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

19. (本小题 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 且 $T_n = (\sqrt{3})^{n^2+n}$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 M_n .

20. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ (e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最大值和最小值.

21. (本小题 12 分)

广东某中学校园内有块扇形空地 OPQ , 经测量其半径为 $60m$, 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$. 学校准备在此扇形空地上修建一所矩形室内篮球场 $ABCD$, 初步设计方案 1 如图 1 所示.

(1) 取 PQ 弧的中点 E , 连接 OE , 设 $\angle BOE = \alpha$, 试用 α 表示方案 1 中矩形 $ABCD$ 的面积, 并求其最大值;

(2) 你有没有更好的设计方案 2 来获得更大的篮球场面积? 若有, 在图 2 中画出来, 并证明你的结论.

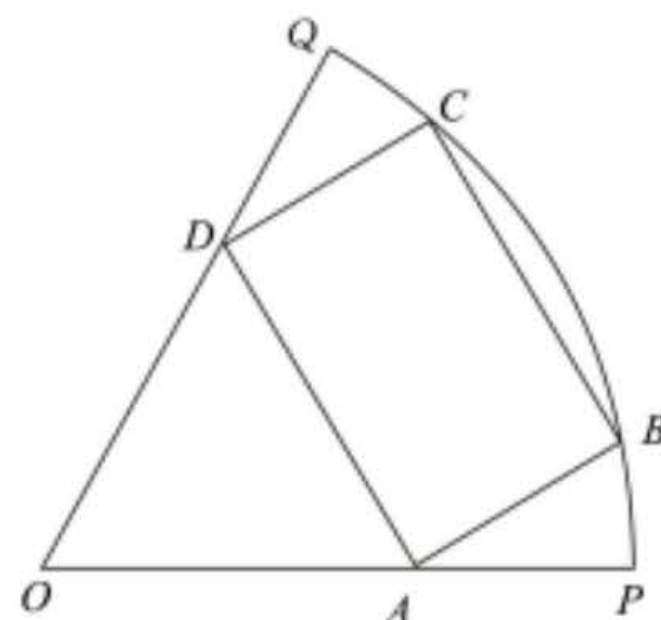


图 1

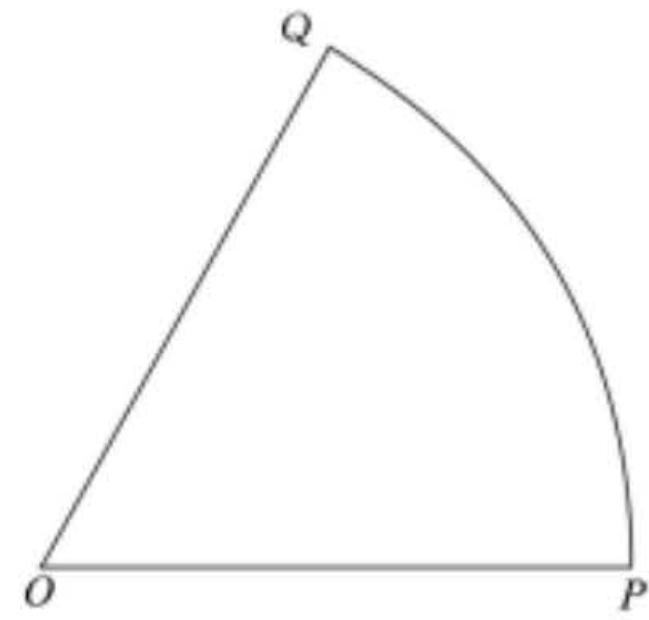


图 2

22. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a < e$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 零点的个数;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq ax^a \ln x - xe^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.