2020 北京十三中高三（上）期中

数　　学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1．（4 分）若集合 $A=\{x\in Z|-1<x<2\}$，$B=\{x|x^2-2x=0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．{0}　　B．{0，1}　　C．{0，1，2}　　D．{－1，0，1，2}

2．（4 分）下列函数中，在区间（0，+∞）上单调递增的是（　　）

A．$y=-x+1$　　B．$y=|x-1|$　　C．$y=\sin x$　　D．$y=x^{\frac{1}{2}}$

3．（4 分）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha$ 等于（　　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

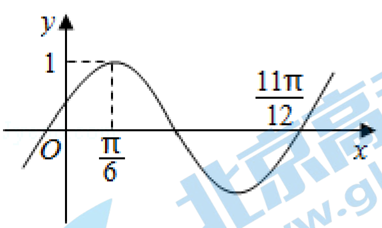
4．（4 分）曲线 $y=\frac{x}{2x-1}$ 在点（1，1）处的切线方程为（　　）

A．$x-y-2=0$　　B．$x+y-2=0$　　C．$x+4y-5=0$　　D．$x-4y-5=0$

5．（4 分）已知 a，3，b，9，c 成等比数列，且 $a>0$，则 $\log_3 b-\log_3 c$ 等于（　　）

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

6．（4 分）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图示，则将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到的图象解析式为（　　）



A．$y=\sin 2x$　　B．$y=\cos 2x$

C．$y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$　　D．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

7．（4 分）若 α 为任意角，则满足$\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos\alpha$ 的一个 k 值为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

8．（4 分）设$\{a_n\}$是等差数列，且公差不为零，其前 n 项和为 S_n，则"$\forall n\in N^*$，$S_{n+1}>S_n$"是"$\{a_n\}$为递增数列"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．（4 分）地震里氏震级是地震强度大小的一种度量．地震释放的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $lgE=4.8+1.5M$．已知两次地震的里氏震级分别为 8.0 级和 7.5 级，若它们释放的能量分别为 E_1 和 E_2，则$\frac{E_1}{E_2}$的值所在的区间为（　　）

A．（1，2）　　B．（5，6）　　C．（7，8）　　D．（15，16）

10．（4 分）已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\geq 0,\\ kx, & x<0.\end{cases}$ 若存在非零实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$(-1,0)$　　D．$[-1,0)$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

11．（5 分）如图是甲、乙两名同学进入高中以来 5 次体育测试成绩的茎叶图，则甲 5 次测试成绩的平均数是______，乙 5 次测试成绩的平均数与中位数之差是______．

甲		乙
6	7	9
7 4 3	8	0 2 8
0	9	1

12．（5 分）$\tan 2010°=$______．

13．（5 分）若 $x>1$，则函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$的最小值为______，此时 $x=$______．

14．（5 分）在疫情防控过程中，某医院一次性收治患者 127 人．在医护人员的精心治疗下，第 15 天开始有患者治愈出院，并且恰有其中的 1 名患者治愈出院．如果从第 16 天开始，每天出院的人数是前一天出院人数的 2 倍，那么第 19 天治愈出院患者的人数为______，第______天该医院本次收治的所有患者能全部治愈出院．

15．（5 分）能够说明"设 a，b，c 是任意实数．若 $a>b>c$，则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为______．

16. （5 分）定义在区间$[a, b]$上的连续函数 $y=f(x)$，如果$\exists\xi\in[a, b]$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，则称 ξ 为区间$[a, b]$上的“中值点”．下列函数：

①$f(x)=3x+2$；

②$f(x)=x^2-x+1$；

③$f(x)=ln(x+1)$；

④$f(x)=(x-\frac{1}{2})^3$，

在区间[0，1]上“中值点”多于一个的函数序号为______．（写出所有满足条件的函数的序号）

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.）

17. （13 分）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=10$，$b_2b_4=a_5$.

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求和：$b_1+b_3+b_5+\ldots+b_{2n-1}$.

18. （13 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2x+1$.

（I）求 $f(\frac{\pi}{4})$的值；

（II）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（III）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$上的最小值.

19. （13 分）某单位有车牌尾号为 2 的汽车 A 和尾号为 6 的汽车 B，两车分属于两个独立业务部门．对一段时间内两辆汽车的用车记录进行统计，在非限行日，A 车日出车频率 0.6，B 车日出车频率 0.5．该地区汽车限行规定如下：

车尾号	0 和 5	1 和 6	2 和 7	3 和 8	4 和 9
限行日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五

现将汽车日出车频率理解为日出车概率，且 A，B 两车出车相互独立.

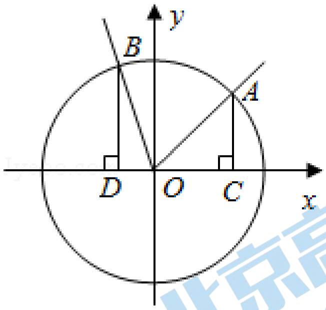
（I）求该单位在星期一恰好出车一台的概率；

（II）设 X 表示该单位在星期一与星期二两天的出车台数之和，求 X 的分布列及其数学期望 $E(X)$．

20．（14 分）如图，在直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点是原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边交单位圆于点 A，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$．将角 α 的终边按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，交单位圆于点 B．记 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

（I）若 $x_1=\frac{1}{3}$，求 x_2；

（II）分别过 A，B 作 x 轴的垂线，垂足依次为 C，D．记△AOC 的面积为 S_1，△BOD 的面积为 S_2．若 $S_1=2S_2$，求角 α 的值．



21．（14 分）已知函数 $f(x)=e^x-2x$．

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）证明：当 $x>0$ 时，曲线 $y=x^2$ 恒在曲线 $y=e^x$ 的下方；

（3）讨论函数 $g(x)=x^2-ae^x$（$a\in R$）零点的个数．

参考公式：$a^{\log_a N}=N$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$）

22．（13 分）设数列 A：a_1，a_2，…，a_N（$N\geq2$）．如果对小于 n（$2\leq n\leq N$）的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$，则称 n 是数列 A 的一个“G 时刻”，记 $G(A)$ 是数列 A 的所有“G 时刻”组成的集合．

（I）对数列 A：－2，2，－1，1，3，写出 $G(A)$ 的所有元素；

（II）证明：若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，则 $G(A)\neq\varnothing$；

（III）证明：若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leq1$（$n=2$，3，…，N），则 $G(A)$ 的元素个数不小于 a_N-a_1．

2020 北京十三中高三（上）期中数学

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1. 【答案】C

【分析】求出集合 A，B，利用并集定义能求出 $A\cup B$.

【解答】解：∵集合 $A=\{x\in Z|-1<x<2\}=\{0，1\}$，

$B=\{x|x^2-2x=0\}=\{0，2\}$，

∴$A\cup B=\{0，1，2\}$.

故选：C.

【点评】本题考查并集的求法，考查并集定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 【答案】D

【分析】关键常见函数的单调性分别判断即可.

【解答】解：对于 A，函数在 R 递减，不合题意；

对于 B，函数在（0，1）递减，不合题意；

对于 C，函数在 R 无单调性，不合题意；

对于 D，函数在（0，+∞）上单调递增，符合题意；

故选：D.

【点评】本题考查了常见函数的单调性问题，是一道基础题.

3. 【答案】A

【分析】根据角的范围，利用同角的三角函数关系式即可求值.

【解答】解：∵α∈（0，π），且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

∴$\tan\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-\sqrt{\frac{1}{\frac{9}{25}}-1}=-\frac{4}{3}$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了同角三角函数间的基本关系式的应用，考查了计算能力，属于基础题.

4. 【答案】B

【分析】求出导数，求得切线的斜率，由点斜式方程可得切线的方程.

【解答】解：$y=\frac{x}{2x-1}$的导数为$y'=\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}=-\frac{1}{(2x-1)^2}$,

可得在点（1，1）处的切线斜率为 - 1，

则所求切线的方程为$y-1=-(x-1)$，

即为$x+y-2=0$.

故选：B.

【点评】本题考查导数的运用：求切线方程，考查导数的几何意义，正确求导和运用点斜式方程是解题的关键，属于基础题.

5. 【答案】A

【分析】根据等比数列的性质和对数的运算性质即可求出.

【解答】解：a，3，b，9，c成等比数列，

则$bc=81$，$b^2=27$，

$\therefore\frac{b^2}{bc}=\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$,

$\therefore\log_3b-\log_3c=\log_3\frac{1}{3}=-1$，

故选：A.

【点评】本题考查了等比数列的性质和对数的运算性质，属于基础题.

6. 【答案】D

【分析】通过函数的图象求出A，求出函数的周期，利用周期公式求出ω，函数过（$\frac{\pi}{6}$，1），结合φ的范围，求出φ，推出函数的解析式，通过函数图象的平移推出结果.

【解答】解：由图象知$A=1$，$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，$T=\pi\Rightarrow\omega=2$，

由 $\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

则图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的图象解析式为 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

故选：D.

【点评】本题考查学生的视图能力，函数的解析式的求法，图象的变换，考查计算能力.

7. 【答案】D

【分析】根据函数值相等，可得后面为 2π 的整数倍，即可求解结论.

【解答】解：因为 $\cos(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4})=\cos\alpha$；

$\therefore k\cdot\frac{\pi}{4}=2n\pi$，$n\in Z$；

$\therefore k=8n$；$n\in Z$；

故选：D.

【点评】本题主要考察诱导公式的应用，属于基础题目.

8. 【答案】A

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解：$\because\{a_n\}$是等差数列，且公差 d 不为零，其前 n 项和为 S_n，

$\therefore$ 由 $S_{n+1}>S_n\Leftrightarrow(n+1)a_1+\frac{(n+1)n}{2}d>na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\Leftrightarrow dn+a_1>0\Leftrightarrow d>0$ 且 $d+a_1>0$.

而数列$\{a_n\}$为递增数列的充要条件 $d>0$，

则“$d>0$”推不出“$d>0$ 且 $d+a_1>0$“. “$d>0$ 且 $d+a_1>0$. “⇒“$d>0$“

即“$S_{n+1}>S_n$”⇒“$\{a_n\}$为递增数列”；

“$\{a_n\}$为递增数列”推不出“$S_{n+1}>S_n$”；

$S_{n+1}>S_n$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的充分不必要条件，

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合等差数列的前 n 项和公式是解决本题的关键．属于基础题．

9. 【答案】B

【分析】先把数据代入已知解析式，再利用对数的运算性质即可得出．

【解答】解：$lgE=4.8+1.5M$，

$\therefore lgE_1=4.8+1.5\times8=16.8$，$lgE_2=4.8+1.5\times7.5=16.05$，

$\therefore E_1=10^{16.8}$，$E_2=10^{16.05}$，

$\therefore \frac{E_1}{E_2}=10^{0.75}$，

$\because 10^{0.75}>9^{0.75}=3^{1.5}=3\times\sqrt{3}>5$，

$\therefore \frac{E_1}{E_2}$的值所在的区间为（5，6），

故选：B．

【点评】本题考查了对数的运用以及运算，熟练掌握对数的运算性质是解题的关键．

10. 【答案】A

【分析】由题意，存在非零实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，可知 $y=e^x-1$ 与函数 $y=-kx$（$k<0$）有交点．即可求解实数 k 的取值范围．

【解答】解：由题意，存在非零实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，可得 $k<0$．

转化为函数 $y=e^x-1$ 与函数 $y=-kx$ 有交点．

设函数 $y=e^x-1$ 与函数 $y=-kx$ 有交点（x'，$e^{x'}-1$）．

其导函数 $y'=e^x$，即切线的斜率 $-k=e^{x'}$

可得 $e^{x'}-1=x'\cdot e^{x'}$，

可得 $x'=0$，

$\because e^{x'}>-k$

$\therefore 1>-k$

即 $k<-1$.

故选：A.

【点评】本题考查了分段函数的应用，同时考查了导函数的几何意义的应用，转化思想的能力，属于中档题，

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

11. 【答案】见试题解答内容

【分析】先从茎叶图中分析出甲、乙两人的成绩数据，再根据中位数和平均数的求法进行运算即得.

【解答】解：由图可知，甲，乙两人共有 5 次测试成绩，分别是：

甲：76、83、84、87、90

乙：79、80、82、88、91

则甲、乙两人 5 次体育测试成绩的中位数分别为 84、82，

平均数分别为 $\overline{甲}=\frac{76+83+84+87+90}{5}=84$，$\overline{乙}=\frac{79+80+82+88+91}{5}=84$

故乙 5 次测试成绩的平均数与中位数之差是 2.

故答案为：84，2.

【点评】茎叶图的茎是高位，叶是低位，所以本题中“茎是十位”，叶是个位，从图中分析出参与运算的数据，代入相应公式即可解答．从茎叶图中提取数据是利用茎叶图解决问题的关键.

12. 【答案】见试题解答内容

【分析】原式中的角度变形后，利用诱导公式及特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

【解答】解：$\tan 2010°=\tan(11\times 180°+30°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点评】此题考查了运用诱导公式化简求值，熟练掌握诱导公式是解本题的关键.

13. 【答案】见试题解答内容

【分析】可令 $t=x-1>0$，将问题转化为研究函数 $y=t+\frac{1}{t}+1$（$t>0$）时的最小值问题，利用导数研究其单调性即可.

【解答】解：令 $t=x-1>0$，∵$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1$，

则原函数化为：$y=t+\frac{1}{t}+1$，（$t>0$），

∵$y'=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}=\frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$，

易知 $t\in(0,1)$ 时，$y'<0$，函数递减；$t\in(1,+\infty)$ 时，$y'>0$，函数递增.

所以 $t=1$ 时，$y_{min}=3$，此时 $x-1=1$，故 $x=2$.

故答案为：3，2.

【点评】本题考查函数最值的求法以及换元思想在解题中的应用．同时考查学生的数学运算能力，属于基础题．

14．【答案】见试题解答内容

【分析】由题意得出院人数构成一个首项为 1，公比为 2 的等比数列，由此能求结果．

【解答】解：某医院一次性收治患者 127 人．

第 15 天开始有患者治愈出院，并且恰有其中的 1 名患者治愈出院．

如果从第 16 天开始，每天出院的人数是前一天出院人数的 2 倍，

∴从第 15 天开始，每天出院人数构成以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

则第 19 天治愈出院患者的人数为 $a_5=1\times2^4=16$，

$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=127$，

解得 $n=7$，

∴第 $7+15-1=21$ 天该医院本次收治的所有患者能全部治愈出院．

故答案为：16，21．

【点评】本题考查出院人数的求法，考查等比数列的性质等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题．

15．【答案】见试题解答内容

【分析】设 a，b，c 是任意实数．若 $a>b>c$，则 $a+b>c$”是假命题，则若 $a>b>c$，则 $a+b\le c$”是真命题，举例即可，本题答案不唯一

【解答】解：设 a，b，c 是任意实数．若 $a>b>c$，则 $a+b>c$"是假命题，

则若 $a>b>c$，则 $a+b\leq c$"是真命题，

可设 a，b，c 的值依次 -1，-2，-3，（答案不唯一），

故答案为：-1，-2，-3

【点评】本题考查了命题的真假，举例说明即可，属于基础题．

16．【答案】见试题解答内容

【分析】根据题意，"中值点"的几何意义是在区间[0，1]上存在点，使得函数在该点的切线的斜率等于区间[0，1]的两个端点连线的斜率值．分别画出四个函数的图象，如图．由此定义再结合函数的图象与性质，对于四个选项逐个加以判断，即得正确答案．

【解答】解：根据题意，"中值点"的几何意义是在区间[0，1]上存在点，使得函数在该点的切线的斜率等于区间[0，1]的两个端点连线的斜率值．如图．

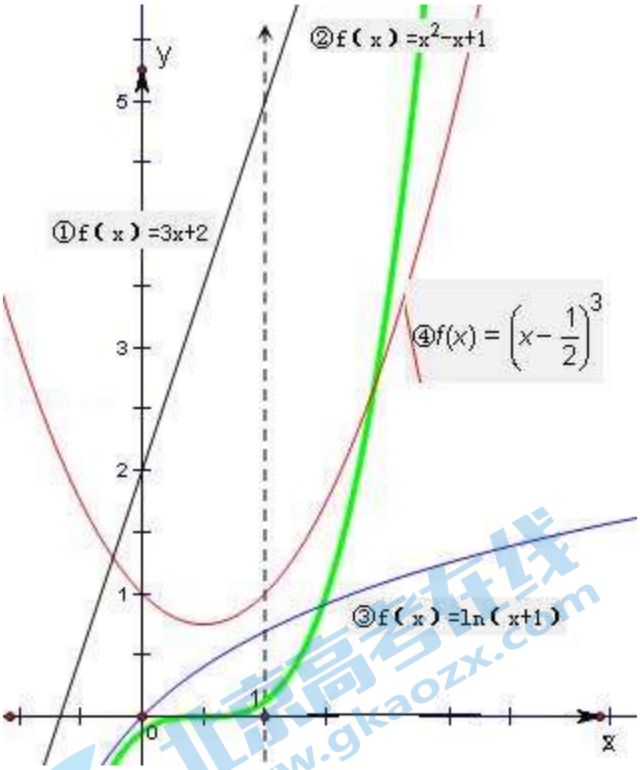
对于①，根据题意，在区间[0，1]上的任何一点都是"中值点"，故①正确；

对于②，根据"中值点"函数的定义，抛物线在区间[0，1]只存在一个"中值点"，故②不正确；

对于③，$f(x)=ln(x+1)$ 在区间[0，1]只存在一个"中值点"，故③不正确；

对于④，根据对称性，函数 $f(x)=(x-\frac{1}{2})^3$ 在区间[0，1]存在两个"中值点"，故④正确．

故答案为：①④．



【点评】本题以命题真假的判断为载体，着重考查了导数及其几何意义等知识点，属于中档题.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.）

17. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）利用已知条件求出等差数列的公差，然后求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）利用已知条件求出公比，然后求解数列的和即可.

【解答】解：（I）等差数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_2+a_4=10$，可得：$1+d+1+3d=10$，解得 $d=2$，

所以$\{a_n\}$的通项公式：$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

（II）由（I）可得 $a_5=a_1+4d=9$，

等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，$b_2b_4=9$．可得 $b_3=3$，或 -3（舍去）（等比数列奇数项符号相同）.

$\therefore q^2=3$，

$\{b_{2n-1}\}$是等比数列，公比为 3，首项为 1.

$b_1+b_3+b_5+\ldots+b_{2n-1}=\dfrac{1(1-q^{2n})}{1-q^2}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

【点评】本题考查等差数列与等比数列的应用，数列求和以及通项公式的求解，考查计算能力.

18. 【答案】（I）$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$；

（II）$f(x)$ 的最小正周期为 π；

（III）$f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$.

【分析】（I）化 $f(x)$ 为正弦型函数，再计算 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值；

{ 或直接求 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值 }

（II）直接计算 $f(x)$ 的最小正周期；

（III）根据 x 的取值范围，利用三角函数的图象与性质求出 $f(x)$ 的最小值.

【解答】解：（I）$f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2x+1$

$=\sin2x+\cos2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$；

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$；

{ 或直接求 $f(\frac{\pi}{4})=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-2\sin^2\frac{\pi}{4}+1=1$ }

（II）所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（III）由 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant0$，得 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}]$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 $-\sqrt{2}$.

【点评】本题考查了三角函数的图象与性质的应用问题，也考查了运算求解能力，是基础题.

19. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）利用互斥事件的概率公式，可求该单位在星期一恰好出车一台的概率；

（II）X 的取值为 0，1，2，3，求出随机变量取每一个值的概率值，即可求 X 的分布列及其数学期望 $E(X)$.

【解答】解：（I）设 A 车在星期 i 出车的事件为 A_i，B 车在星期 i 出车的事件为 B_i，$i=1$，2，3，4，5，则

由已知可得 $P(A_i)=0.6$，$P(B_i)=0.5$.

设该单位在星期一恰好出车一台的事件为 C，则

P（C）$=P$（$A_1\overline{B_1}+\overline{A_1}B_1$）$=P(A_1)P(\overline{B_1})+P(\overline{A_1})P(B_1)=0.6\times$（$1-0.5$）+（$1-0.6$）$\times0.5=0.5$，

∴该单位在星期一恰好出车一台的概率为 0.5；

（II）X 的取值为 0，1，2，3，则

P（$X=0$）$=P(\overline{A_1B_1})P(\overline{A_2})=0.4\times0.5\times0.4=0.08$，

P（$X=1$）$=P(C)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1B_1})P(A_2)=0.5\times0.4+0.4\times0.5\times0.6=0.32$，

P（$X=2$）$=P(A_1B_1)P(\overline{A_2})+P(C)P(A_2)=0.6\times0.5\times0.4+0.5\times0.6=0.42$，

P（$X=3$）$=P$（A_1B_1）P（A_2）$=0.6\times0.5\times0.6=0.18$，

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.08	0.32	0.42	0.18

$EX=1\times0.32+2\times0.42+3\times0.18=1.7$.

【点评】求随机变量的分布列与期望的关键是确定变量的取值，求出随机变量取每一个值的概率值.

20. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）由三角函数定义，得 $x_1=\cos\alpha=\frac{1}{3}$，由此利用同角三角函数的基本关系求得 $\sin\alpha$ 的值，再根据 $x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$，利用两角和的余弦公式求得结果.

（II）依题意得 $y_1=\sin\alpha$，$y_2=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$，分别求得 S_1 和 S_2 的解析式，再由 $S_1=2S_2$ 求得 $\cos2\alpha=0$，根据 α 的范围，求得 α 的值.

【解答】（I）解：由三角函数定义，得 $x_1=\cos\alpha$，$x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$.

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

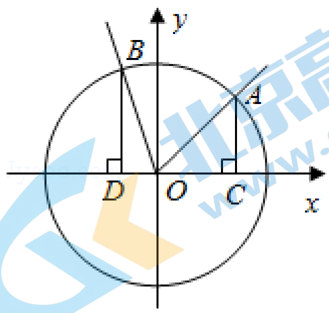
（II）解：依题意得 $y_1=\sin\alpha$，$y_2=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$．所以 $S_1=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin2\alpha$，

$S_2=\frac{1}{2}|x_2|y_2=\frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$．

依题意 $S_1=2S_2$ 得 $\sin2\alpha=-2\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$，即 $\sin2\alpha=-2[\sin2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\cos2\alpha\sin\frac{2\pi}{3}]=\sin2\alpha-\sqrt{3}\cos2\alpha$，

整理得 $\cos2\alpha=0$．

因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2\alpha<\pi$，所以 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$．



【点评】本题主要考查任意角的三角函数的定义，两角和差的正弦公式、余弦公式，同角三角函数的基本关系的应用，属于中档题．

21．【答案】见试题解答内容

【分析】（1）利用导数等于 0，求出函数的极值；

（2）构造函数 $g(x)=e^x-x^2$，求出导数，利用（1）的结论得到导函数的符号，判断 $g(x)$ 的单调性，从而得出结论；

（3）$a=0$ 时，显然求出，$a\neq0$ 时，问题转化为 $y=e^x$ 和 $y=\frac{1}{a}x^2$ 的交点个数，通过讨论 a 的范围结合（2），求出即可．

【解答】解：（1）∵函数 $f(x)=e^x-2x$（$x\in R$），

∴$f'(x)=e^x-2$；

令 $f'(x)=0$，即 $e^x-2=0$，

解得 $x=ln2$，

∴函数 $f(x)$ 的极值是

$f(ln2)=e^{ln2}-2ln2=2-2ln2$；

（2）证明：设函数 $h（x）=e^x-x^2$，

$\therefore h'（x）=e^x-2x$；

由（1）知 $f（x）=e^x-2x$ 在 $x=ln2$ 取得极小值，

$\therefore h'（x）\geq f（ln2）=e^{ln2}-ln2=2-ln2>0$，

$\therefore h（x）$ 是 R 上的增函数，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$h（x）>h（0）=1>0$，

$\therefore e^x>x^2$，即 $x^2<e^x$；

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x^2$ 恒在曲线 $y=e^x$ 的下方；

（3）$a=0$ 时，$g（x）=x^2$，函数 $g（x）$ 有 1 个零点，

$a\neq0$ 时，论函数 $g（x）=x^2-ae^x$（$a\in R$）零点的个数，

即讨论 $y=e^x$ 和 $y=\frac{1}{a}x^2$ 的交点个数，

①$a<0$ 时，$y=\frac{1}{a}x^2$ 开口向下，和 $y=e^x$ 无交点，即函数 $g（x）$ 无零点；

②$a>0$ 时，$y=\frac{1}{a}x^2$ 开口向上，$x<0$ 时与 $y=e^x$1 个交点，

下面讨论 $x>0$ 的情况，

由（2）得：$\frac{1}{a}\leq1$ 即 $a\geq1$ 时，$\frac{1}{a}x^2<e^x$；

故 $0<a<1$ 时，$y=e^x$ 和 $y=\frac{1}{a}x^2$ 有 3 个交点，$g（x）$ 有 3 个零点，

$a\geq1$ 时，$y=e^x$ 和 $y=\frac{1}{a}x^2$ 有 1 个交点，$g（x）$ 有 1 个零点，

综上：$a<0$ 时，函数 $g（x）$ 无零点；$a=0$ 时，函数 $g（x）$ 有 1 个零点，

$0<a<1$ 时，$g（x）$ 有 3 个零点，$a\geq1$ 时，$g（x）$ 有 1 个零点.

【点评】本题考查了导数的应用问题，也考查运算求解能力以及逻辑推理能力，考查了函数与方程思想的应用问题，是难题目.

22. 【答案】见试题解答内容

【分析】（I）结合“G 时刻”的定义进行分析；

（II）可以采用假设法和递推法进行分析；

（III）可以采用假设法和列举法进行分析．

【解答】解：（I）根据题干可得，$a_1=-2$，$a_2=2$，$a_3=-1$，$a_4=1$，$a_5=3$，$a_1<a_2$满足条件，2满足条件，$a_2>a_3$不满足条件，3不满足条件，

$a_2>a_4$不满足条件，4不满足条件，a_1，a_2，a_3，a_4，均小于a_5，因此5满足条件，因此$G（A）=\{2，5\}$．

（II）因为存在$a_n>a_1$，设数列A中第一个大于a_1的项为a_k，则$a_k>a_1\geq a_i$，其中$2\leq i\leq k-1$，所以$k\in G（A）$，$G（A）\neq\varnothing$；

（III）设A数列的所有"G时刻"为$i_1<i_2<\ldots<i_k$，

对于第一个"G时刻"i_1，有$a_{i_1}>a_1\geq a_i$（$i=2，3，\ldots，i_1-1$），则

$a_{i_1}-a_1\leq a_{i_1}-a_{i_1-1}\leq 1$．

对于第二个"G时刻"i_1，有$a_{i_2}>a_{i_1}\geq a_i$（$i=2，3，\ldots，i_1-1$），则

$a_{i_2}-a_{i_1}\leq a_{i_2}-a_{i_2-1}\leq 1$．

类似的$a_{i_3}-a_{i_2}\leq 1$，…，$a_{i_k}-a_{i_{k-1}}\leq 1$．

于是，$k\geq（a_{i_k}-a_{i_{k-1}}）+（a_{i_{k-1}}-a_{i_{k-2}}）+\ldots+（a_{i_2}-a_{i_1}）+（a_{i_1}-a_1）=a_{i_k}-a_1$．

对于a_N，若$N\in G（A）$，则$a_{i_k}=a_N$．

若$N\notin G（A）$，则$a_N\leq a_{i_k}$，否则由（2）知a_{i_k}，$a_{i_{k+1}}$，…，a_N，中存在"G时刻"与只有k个"G时刻"矛盾．

从而$k\geq a_{i_k}-a_1\geq a_N-a_1$．

【点评】本题属于新定义题型，重点在于对"G时刻"定义的把握，难度较大．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。