

2018 年北京市普通高中学业水平考试合格性考试

数 学 试 卷

考 生 须 知	1. 考生要认真填写考场号和座位序号。 2. 本试卷共 6 页，分为两个部分，第一部分为选择题，25 个小题(共 75 分)；第二部分为解答题，4 个小题（共 25 分）。 3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。 4. 考试结束后，考生应将试卷、答题卡放在桌面上，待监考员收回。
------------------	--

参考公式：柱体的体积公式  $V = Sh$ ，其中  $S$  为柱体的底面积， $h$  为柱体的高。

第一部分 选择题 (每小题 3 分，共 75 分)

在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{0, 1\}$ ， $B = \{-1, 1, 3\}$ ，那么  $A \cap B$  等于

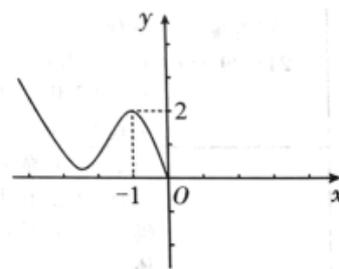
- A.  $\{0\}$       B.  $\{1\}$       C.  $\{0, 1\}$       D.  $\{0, 1, 3\}$

2. 平面向量  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  满足  $\vec{b} = 2\vec{a}$ ，如果  $\vec{a} = (1, 2)$ ，那么  $\vec{b}$  等于

- A.  $(-2, -4)$     B.  $(-2, 4)$     C.  $(2, -4)$     D.  $(2, 4)$

3. 如果直线  $y = kx - 1$  与直线  $y = 3x$  平行，那么实数  $k$  的值为

- A.  $-1$       B.  $-\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $3$



4. 如图，给出了奇函数  $f(x)$  的局部图像，那么  $f(1)$  等于

- A.  $-4$       B.  $-2$       C.  $2$       D.  $4$

5. 如果函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ，且  $a \neq 1$ ) 的图像经过点  $(2, 9)$ ，那么实数  $a$  等于

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $2$       D.  $3$

6. 某中学现有学生 1800 人，其中初中学生 1200 人，高中学生 600 人。为了解学生在“阅读节”活动中的参与情况，决定采用分层抽样的方法从全校学生中抽取一个容量为 180 的样本，那么应从高中学生中抽取的人数为

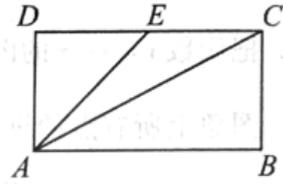
- A. 60      B. 90      C. 100      D. 110

7. 已知直线  $l$  经过点  $O(0, 0)$ ，且与直线  $x - y - 3 = 0$  垂直，那么直线  $l$  的方程是

- A.  $x + y - 3 = 0$     B.  $x - y + 3 = 0$     C.  $x + y = 0$       D.  $x - y = 0$

8. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $E$  为  $CD$  中点, 那么向量  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$  等于

- A.  $\vec{AE}$       B.  $\vec{AC}$       C.  $\vec{DC}$       D.  $\vec{BC}$



9. 实数  $(\frac{1}{2})^{-1} + \log_3 1$  的值等于

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

10. 函数  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = (\frac{1}{2})^x$ ,  $y = \lg x$  中, 在区间  $(0, +\infty)$  上为减函数的是

- A.  $y = x^2$       B.  $y = x^3$       C.  $y = (\frac{1}{2})^x$       D.  $y = \lg x$

11. 某次抽奖活动共设置一等奖、二等奖两类奖项. 已知中一等奖的概率为 0.1, 中二等奖的概率为 0.2, 那么本次抽奖活动中, 中奖的概率为

- A. 0.1      B. 0.2      C. 0.3      D. 0.7

12. 如果正  $\triangle ABC$  的边长为 1, 那么  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  等于

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. 2

13. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 如果  $a=10$ ,  $A=45^\circ$ ,  $B=30^\circ$ , 那么  $b$  等于

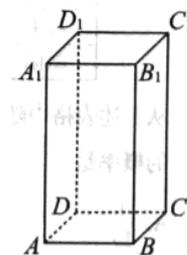
- A.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$       B.  $5\sqrt{2}$       C.  $10\sqrt{2}$       D.  $20\sqrt{2}$

14. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ , 那么圆心  $C$  到坐标原点  $O$  的距离是

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C. 1      D.  $\sqrt{2}$

15. 如图, 在四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  是正方形,  $A_1A \perp$  底面  $ABCD$ ,  $A_1A=2$ ,  $AB=1$ , 那么该四棱柱的体积为

- A. 1  
B. 2  
C. 4  
D. 8



16. 函数  $f(x) = x^3 - 5$  的零点所在的区间是

- A. (1, 2)      B. (2, 3)      C. (3, 4)      D. (4, 5)

17. 在  $\sin 50^\circ$ ,  $-\sin 50^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$ ,  $-\sin 40^\circ$  四个数中, 与  $\sin 130^\circ$  相等的是

- A.  $\sin 50^\circ$       B.  $-\sin 50^\circ$       C.  $\sin 40^\circ$       D.  $-\sin 40^\circ$

18. 把函数  $y = \sin x$  的图像向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位得到  $y = g(x)$  的图像, 再把  $y = g(x)$  图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 所得到图像的解析式为

- A.  $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$                       B.  $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$   
 C.  $y = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$                       D.  $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

19. 函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$  的最小值是

- A. -1              B. 0              C. 1              D. 2

20. 在空间中, 给出下列四个命题:

- ① 平行于同一个平面的两条直线互相平行;  
 ② 垂直于同一个平面的两条直线互相平行;  
 ③ 平行于同一条直线的两个平面互相平行;  
 ④ 垂直于同一个平面的两个平面互相平行.

其中正确命题的序号是

- A. ①              B. ②              C. ③              D. ④

21. 北京市环境保护监测中心每月向公众公布北京市各区域的空气质量状况. 2018 年 1 月份各区域的 PM2.5 浓度情况如下表:

各区域 1 月份 PM 2.5 浓度 (单位: 微克 / 立方米) 表

区域	PM 2.5 浓度	区域	PM 2.5 浓度	区域	PM 2.5 浓度
怀柔	27	海淀	34	平谷	40
密云	31	延庆	35	丰台	42
门头沟	32	西城	35	大兴	46
顺义	32	东城	36	开发区	46
昌平	32	石景山	37	房山	47
朝阳	34	通州	39		

从上述表格随机选择一个区域, 其 2018 年 1 月份 PM2.5 的浓度小于 36 微克 / 立方米的概率是

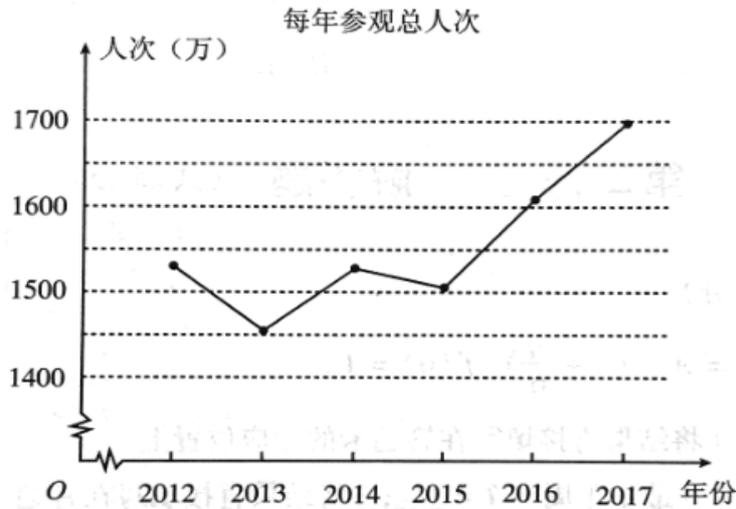
- A.  $\frac{1}{17}$               B.  $\frac{4}{17}$               C.  $\frac{5}{17}$               D.  $\frac{9}{17}$

22. 已知  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 那么  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

- A.  $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$               B.  $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$               C.  $\frac{7\sqrt{2}}{26}$               D.  $\frac{17\sqrt{2}}{26}$

23. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 如果  $a=3, b=\sqrt{2}, c=2\sqrt{2}$ , 那么  $\triangle ABC$  的最大内角的余弦值为
- A.  $\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{3}{8}$       D.  $\frac{1}{2}$

24. 北京故宫博物院成立于 1925 年 10 月 10 日, 是在明朝、清朝两代皇宫及其宫廷收藏的基础上建立起来的中国综合性博物馆, 每年吸引着大批游客参观游览. 下图是从 2012 年到 2017 年每年参观总人次的折线图.



根据图中信息, 下列结论中正确的是

- A. 2013 年以来, 每年参观总人次逐年递增
- B. 2014 年比 2013 年增加的参观人次不超过 50 万
- C. 2012 年到 2017 年这六年间, 2017 年参观总人次最多
- D. 2012 年到 2017 年这六年间, 平均每年参观总人次超过 1600 万
25. 阅读下面题目及其证明过程, 在横线处应填写的正确结论是

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中, 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ,  $BC \perp AC$ .

求证:  $BC \perp PA$ .

证明: 因为平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ,  
 平面  $PAC \cap$  平面  $ABC = AC$ ,  
 $BC \perp AC$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ ,  
 所以\_\_\_\_\_.

因为  $PA \subset$  平面  $PAC$ ,  
 所以  $BC \perp PA$ .

- A.  $AB \perp$  底面  $PAC$       B.  $AC \perp$  底面  $PBC$

- C.  $BC \perp$  底面  $PAC$       D.  $AB \perp$  底面  $PBC$

## 第二部分 解答题 (共 25 分)

26. (本小题满分 7 分)

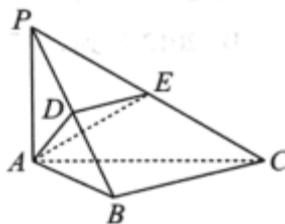
已知函数  $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ,  $f(0) = 1$ .

- (I)  $A =$  \_\_\_\_\_; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)  
 (II) 函数  $f(x)$  的最小正周期  $T =$  \_\_\_\_\_; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)  
 (III) 求函数  $f(x)$  的最小值及相应的  $x$  的值.

27. (本小题满分 7 分)

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $D, E$ , 分别为  $PB, PC$  的中点.

- (I) 求证:  $BC \parallel$  平面  $ADE$ ;  
 (II) 求证:  $BC \perp$  平面  $PAB$ .



28. (本小题满分 6 分)

已知圆  $O: x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 经过点  $A(0, 5)$ , 与  $x$  轴正半轴交于点  $B$ .

- (I)  $r =$  \_\_\_\_\_; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)  
 (II) 圆  $O$  上是否存在点  $P$ , 使得  $\triangle PAB$  的面积为 15? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

29. (本小题满分 5 分)

种植于道路两侧、为车辆和行人遮阴并构成街景的乔木称为行道树。为确保行人、车辆和临近道路附属设施安全，树木与原有电力线之间的距离不能超出安全距离。按照北京市《行道树修剪规范》要求，当树木与原有电力线发生矛盾时，应及时修剪树枝。《行道树修剪规范》中规定，树木与原有电力线的安全距离如下表所示：

树木与电力线的安全距离表

电力线	安全距离(单位: m)	
	水平距离	垂直距离
≤ 1KV	≥ 1	≥ 1
3KV ~ 10KV	≥ 3	≥ 3
35KV ~ 110KV	≥ 3.5	≥ 4
154KV ~ 220KV	≥ 4	≥ 4.5
330KV	≥ 5	≥ 5.5
500KV	≥ 7	≥ 7

现有某棵行道树已经自然生长 2 年，高度为 2m。据研究，这种行道树自然生长的时间  $x$  (年) 与它的高度  $y$  (m) 满足关系式  $y = \frac{30}{1 + 28e^{-rx}}$  ( $r > 0$ )。

- (I)  $r =$  \_\_\_\_\_; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)
- (II) 如果这棵行道树的正上方有 35KV 的电力线，该电力线距地面 20m。那么这棵行道树自然生长多少年必须修剪？
- (III) 假如这棵行道树的正上方有 500KV 的电力线，这棵行道树一直自然生长，始终不会影响电力线段安全，那么该电力线距离地面至少多少 m？

2018 年北京市普通高中学业水平考试合格性考试

数学试卷答案及评分参考

[说明]

1. 第一部分选择题，机读阅卷。
2. 第二部分解答题。为了阅卷方便，解答题中的推导步骤写得较为详细，考生只要写明主要过程即可。若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分。解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

第一部分 选择题 (共 75 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	D	D	B	D	A	C	A	B
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	C	C	B	B	C	B	A	A	A
题号	19	20	21	22	23	24	25	-----	
答案	B	B	D	D	A	C	C	-----	

第二部分 解答题 (共 25 分)

26. (本小题满分 7 分)

已知函数  $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ,  $f(0) = 1$ .

(I)  $A = \underline{\quad}$ ; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)

(II) 函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \underline{\quad}$ ; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)

(III) 求函数  $f(x)$  的最小值及相应的  $x$  的值.

(I)  $A = 2$ ; .....2 分

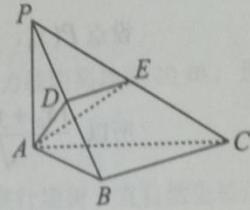
(II)  $T = 2\pi$ ; .....4 分

(III) 解: 函数  $f(x)$  的最小值  $f(x)_{\min} = -2$ ,

此时  $x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . .....7 分

27. (本小题满分 7 分)

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $D, E$  分别为  $PB, PC$  的中点.



(I) 求证:  $BC \parallel$  平面  $ADE$ ;

(II) 求证:  $BC \perp$  平面  $PAB$ .

(I) 证明: 在  $\triangle PBC$  中,

因为  $D, E$  分别为  $PB, PC$  的中点,

所以  $BC \parallel DE$ .

因为  $BC \not\subset$  平面  $ADE, DE \subset$  平面  $ADE$ ,

所以  $BC \parallel$  平面  $ADE$ . .....3 分

(II) 证明: 因为  $PA \perp$  平面  $ABC, BC \subset$  平面  $ABC$ ,

所以  $PA \perp BC$ .

因为  $AB \perp BC, PA \cap AB = A$ ,

所以  $BC \perp$  平面  $PAB$ . .....7 分

28. (本小题满分 6 分)

已知圆  $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  经过点  $A(0, 5)$ , 与  $x$  轴正半轴交于点  $B$ .

(I)  $r =$  \_\_\_; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)

(II) 圆  $O$  上是否存在点  $P$ , 使得  $\triangle PAB$  的面积为 15? 若存在, 求出点  $P$  的坐标;

若不存在, 说明理由.

(I)  $r = 5$ . .....1 分

(II) 存在;

因为  $r = 5$ ,

所以 圆  $O$  的方程为  $x^2 + y^2 = 25$ .

依题意  $A(0, 5), B(5, 0)$ ,

所以  $|AB| = 5\sqrt{2}$ , 直线  $AB$  的方程为  $x + y - 5 = 0$ .

又因为  $\triangle PAB$  的面积为 15,

所以点  $P$  到直线  $AB$  的距离为  $3\sqrt{2}$ .

设点  $P(x_0, y_0)$ ,

$$\text{所以 } \frac{|x_0 + y_0 - 5|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

解得  $x_0 + y_0 = -1$  或  $x_0 + y_0 = 11$  (显然此时点  $P$  不在圆上, 舍).

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x_0 + y_0 = -1, \\ x_0^2 + y_0^2 = 25. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_0 = -4, \\ y_0 = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = -4. \end{cases}$$

所以, 存在点  $P(-4, 3)$  或  $P(3, -4)$  满足题意. .....6 分

29. (本小题满分 5 分)

种植于道路两侧、为车辆和行人遮荫并构成街景的乔木称为行道树。为确保行人、车辆和临近道路附属设施安全, 树木与原有电力线之间的距离不能超出安全距离。按照北京市《行道树修剪规范》要求, 当树木与原有电力线发生矛盾时, 应及时修剪树枝。《行道树修剪规范》中规定, 树木与电力线的安全距离如下表所示:

树木与电力线的安全距离表

电力线	安全距离 (单位: m)	
	水平距离	垂直距离
$\leq 1\text{KV}$	$\geq 1$	$\geq 1$
3KV~10KV	$\geq 3$	$\geq 3$
35KV~110KV	$\geq 3.5$	$\geq 4$
154KV~220KV	$\geq 4$	$\geq 4.5$
330KV	$\geq 5$	$\geq 5.5$
500KV	$\geq 7$	$\geq 7$

现有某棵行道树已经自然生长2年，高度为2 m. 据研究这种行道树自然生长的时间  $x$  (年) 与它的高度  $y$  (m) 满足关系式  $y = \frac{30}{1+28e^{-rx}}$  ( $r > 0$ ).

(I)  $r = \underline{\quad}$ ; (将结果直接填写在答题卡的相应位置上)

(II) 如果这棵行道树的正上方有35 KV 的电力线，该电力线距离地面20 m. 那么这棵行道树自然生长多少年必须修剪?

(III) 假如这棵行道树的正上方有500 KV 的电力线，这棵行道树一直自然生长，始终不会影响电力线的安全，那么该电力线距离地面至少多少 m?

(I)  $r = \frac{\ln 2}{2}$ ; .....1分

(II) 解: 依题意, 该树木的高度为16米时需及时修剪这棵行道树.

$$\text{函数解析式为 } y = \frac{30}{1+28 \times 2^{-\frac{x}{2}}},$$

$$\text{令 } y = 20 - 4 = 16, \text{ 可解得 } x = 10.$$

所以, 这棵行道树自然生长10年必须修剪. ....3分

(III) 解: 因为  $2^{-\frac{x}{2}} > 0$ ,

$$\text{所以 } 1+28 \times 2^{-\frac{x}{2}} > 1.$$

$$\text{所以 } y = \frac{30}{1+28 \times 2^{-\frac{x}{2}}} < 30.$$

所以, 该电力线距离地面至少37m时, 这棵行道树一直自然生长, 始终不会影响电力线的安全. ....5分