

## 数 学

## 考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $M = \{1, 3, 5\}$ ,  $N = \{2, 4, 6\}$ , 则  $M \cup N =$ 
  - A.  $\{x | 1 \leq x \leq 6\}$
  - B.  $\emptyset$
  - C.  $\mathbf{N}^*$
  - D.  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 9 = 0\}$ , 若  $B \subsetneq A$ , 则满足条件的集合  $B$  的个数为
  - A. 1
  - B. 2
  - C. 3
  - D. 4
3. 已知全集  $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $A = \{-2, 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 4\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B =$ 
  - A.  $\{-1, 1, 4\}$
  - B.  $\{-1, 4\}$
  - C.  $\{-2, -1, 4\}$
  - D.  $\{-2, -1, 2, 4\}$
4. 下列命题是真命题的是
  - A.  $\forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2} = x$
  - B.  $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$
  - C.  $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| \in \mathbf{N}$
  - D.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 3 = 0$
5. 已知  $p: m^2 - 8m < 0$ ,  $q$ : 关于  $x$  的不等式  $x^2 + (m-4)x + 9 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则  $p$  是  $q$  的
  - A. 充分不必要条件
  - B. 必要不充分条件
  - C. 既不充分也不必要条件
  - D. 充要条件
6. 若  $x > 3$ , 则  $\frac{x^2 - 6x + 11}{x - 3}$  的最小值为
  - A. 2
  - B.  $\sqrt{2}$
  - C.  $4\sqrt{2}$
  - D.  $2\sqrt{2}$

7. 已知集合  $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{10}{x^2 - 2x + 2} > 1 \right\}$ ,  $B = \{1, a, a+1\}$ , 若  $A = B$ , 则实数  $a$  的值为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $\{x \mid -1 < x < 3\}$ , 则下列结论正确的是

A.  $b = 2a$

B.  $4a + 2b + c < 0$

C. 不等式  $ax + c > 0$  的解集为  $\{x \mid x < 3\}$

D. 不等式  $bx^2 - cx - a > 0$  的解集为  $\left\{ x \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合  $A = \{0, \emptyset\}$ , 则下列关系正确的是

A.  $0 \in A$

B.  $\emptyset \in A$

C.  $\emptyset \subsetneq A$

D.  $0 \subsetneq A$

10. 已知  $a < -1 < b < 0, c > 1$ , 则下列关系正确的是

A.  $a^2 < c^2$

B.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

C.  $\frac{a}{c-a} < \frac{b}{c-b}$

D.  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

11. 下列说法正确的是

A. 命题  $p: \exists x > 0$ , 使得  $x^2 - 6x - 12 = 0$ , 则  $p$  的否定:  $\forall x > 0, x^2 - 6x - 12 \neq 0$

B. 命题  $p: \forall x > 0, x(x-4) > 0$ , 则  $p$  的否定:  $\exists x \leq 0, x(x-4) \leq 0$

C. 命题“任意一个平行四边形的四个顶点都在同一个圆上”的否定是假命题

D. 命题“存在两个不全等三角形的面积相等”的否定是假命题

12. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + (2-k)x + k - 2 = 0$ , 则下列结论正确的是

A. 方程有一正一负两个实数根的充要条件是  $k \in \{k \mid k < 2\}$

B. 方程有两个不相等的正实数根的充要条件是  $k \in \{k \mid k > 6\}$

C. 方程无实数根的一个充分条件是  $k \in \{k \mid 3 < k < 5\}$

D. 当  $k = 3$  时, 方程的两实数根之和为 1

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 不等式  $\frac{4}{2x-1} > 3$  的解集为 \_\_\_\_\_.

14. 已知集合  $A = \{x \mid x < 2a\}$ ,  $B = \{x \mid 1 < x < 4\}$ , 且  $B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$ , 则实数  $a$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

15. 若命题“ $\forall x \leq 2, x^2 - 4x > m$ ”是假命题, 则实数  $m$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

16. 已知  $a, b$  为正实数, 且满足  $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 若存在  $a, b$  使不等式  $\frac{a}{3} + b < k^2 - 5k - 10$  成立, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题,请写出它们的否定,并判断否定的真假.

(I) 对任意  $x \in \mathbf{R}, x^2 + 4x + 3 \geq 0$ ;

(II) 存在  $x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 5 = 0$ .

18. (12 分)

已知命题  $p: " \forall x \in \{x \mid -2 < x < 1\}, x - 2m \leq 0 "$ , 命题  $q: " \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + (m - 1)x + 1 - m \neq 0 "$ , 若  $p$  是真命题,  $q$  是假命题, 求实数  $m$  的取值范围.

19. (12 分)

已知集合  $A = \{(x, y) \mid y = mx^2 - 2\}, B = \{(x, y) \mid y = x + 4\}$ .

(I) 若  $m = 1$ , 求  $A \cap B$ ;

(II) 若  $A \cap B$  中有且仅有一个元素, 求实数  $m$  的值.

20. (12分)

已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x - 12 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | a - 7 < x < 2a, a \in \mathbf{R}\}$ .

(I) 若  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = B$ , 求  $a$  的取值范围;

(II) 若  $x \in \complement_{\mathbf{R}} B$  是  $x \in \complement_{\mathbf{R}} A$  的充分不必要条件, 求  $a$  的取值范围.

21. (12分)

某人投资 180 万元建成一座海水养殖场用于海参养殖, 建成后每年可获得销售收入 130 万元, 同时, 经过预算可知  $x (x \in \mathbf{N}^*)$  年内须另外投入  $5x(x+6)$  万元的经营成本.

(I) 该海水养殖场从第几年起开始盈利(总利润为正)?

(II) 该海水养殖场总利润达到最大时是第几年? 请求出总利润的最大值.

(III) 该海水养殖场年平均利润达到最大时是第几年? 请求出年平均利润的最大值.

(注: 总利润 = 销售总收入 - 经营成本 - 投资费用)

22. (12分)

已知关于  $x$  的方程  $3mx^2 + 3px + 4q = 0$  (其中  $m, p, q$  均为实数) 有两个不等实根  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .

(I) 若  $p = q = 1$ , 求  $m$  的取值范围;

(II) 若  $x_1, x_2$  为两个整数根,  $p$  为整数, 且  $m = -\frac{p}{3}, q = \frac{1-p}{4}$ , 求  $x_1, x_2$ ;

(III) 若  $x_1, x_2$  满足  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 1$ , 且  $m = 1$ , 求  $p$  的取值范围.