华南师大附中2020届高三年级月考（三）

理科数学

2019年12月3日

本试卷分选择题和非选择题两部分，共4页，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名和考生号、试室号、座位号等填写在答题卡上，并用2B铅笔在答题卡上的相应位置填涂考生号。

2．回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。

3．回答第Ⅱ卷时，用黑色钢笔或签字笔将答案写在答卷上。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1．已知复数$z_1=4-i$，$z_2=4+i$，则$\dfrac{z_1z_2}{i}$等于（***）

A. $15i$　　B. $-15i$　　C. $17i$　　D. $-17i$

2．设集合 $A=\{5,\dfrac{b}{a},a-b\},B=\{b,a+b,-1\}$，若$A\cap B=\{2,-1\}$，则$A\cup B=$（***）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{-1,2,5\}$　　C. $\{2,3,5\}$　　D. $\{-1,2,3,5\}$

3．设平面α与平面β相交于直线m，直线a在平面α内，直线b在平面β内，且$b\perp m$，

则“$a\perp b$”是“$\alpha\perp\beta$”的（***）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

4．若$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则下列四个不等式恒成立的是（***）

A. $|a|>|b|$　　B. $a<b$　　C. $a^3<b^3$　　D. $a+b<ab$

5．过抛物线$y^2=2x$的焦点作一条直线与抛物线交于A,B两点，它们的横坐标之和等于1，

则这样的直线（***）

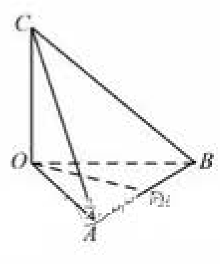
A.有且仅有零条　　B. 有且仅有一条　　C. 有且仅有两条　　D. 有且仅有四条

6．如图，在三棱锥 $O-ABC$ 中，$OA=OB=OC=1$，$\angle AOB=90^\circ$，

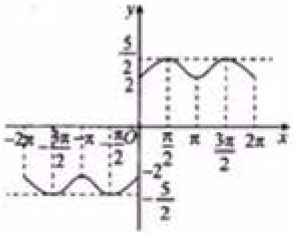
$OC\perp$平面AOB，D 为 AB 中点，

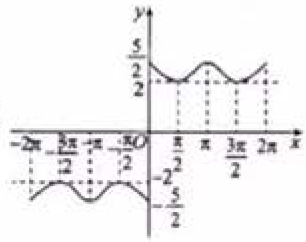
则 OD 与平面 OBC 所成的角为（***）

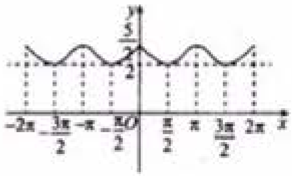
A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

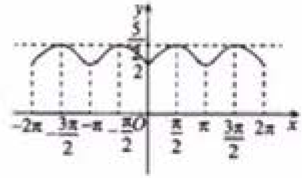


7．函数 $y=2^{\sin x}+\dfrac{1}{2^{\sin x}}$ 的部分图象大致是（***）

A. 

B. 

C. 

D. 

8．若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+a\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是（***）

A. $\left[-1,+\infty\right)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $\left(-\infty,-1\right]$　　D. $(-\infty,-1)$

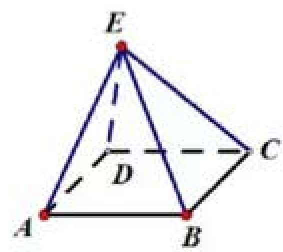
9．已知 α,β 为锐角，$\sin(\alpha+2\beta)=\dfrac{1}{5},\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值为（***）

A. $\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{15}$　　B. $\dfrac{1-8\sqrt{3}}{15}$ 或 $\dfrac{1+8\sqrt{3}}{15}$　　C. $\dfrac{1-8\sqrt{3}}{15}$　　D. $\dfrac{1+8\sqrt{3}}{15}$

10．在 ΔABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{1}{2}$，$(a^2-3b^2)\cos C=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，

则角 $C=$（***）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$



11．如图所示，已知 $\triangle EAB$ 所在的平面与矩形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直，$EA=EB=3$，$AD=2$，$\angle AEB=60^\circ$，则多面体 $E-ABCD$ 的外接球的表面积为（***）

A. $\dfrac{16\pi}{3}$　　B. 8π　　C. 16π　　D. 64π

12．正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=a_n^2+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，设 $c_n=(-1)^n\dfrac{2a_n+1}{2S_n}$，

则数列 $\{c_n\}$ 的前 2020 项的和为（***）

A. $-\dfrac{2020}{2021}$　　B. $-\dfrac{2021}{2020}$　　C. $-\dfrac{2019}{2020}$　　D. $-\dfrac{2020}{2019}$

第Ⅱ卷

二、填空题（每小题 5 分，满分 20 分）

13．若函数 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+3}{2^x-1}$ 是奇函数，则常数 $a=$__________.

14. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_9=-18$，$S_{13}=-52$，等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_5=a_5$，$b_7=a_7$，则 b_{15} 的值为________.

15. 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切，且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，则 $a=$________.

16. 若关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x+2}=kx^2$ 恰有四个不同的实根，则实数 k 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. 若向量$\vec{a}=(\sqrt{3}sin\omega x,sin\omega x)$,$\vec{b}=(cos\omega x,sin\omega x)$,其中$\omega>0$,记函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{2}$,若函数$f(x)$的图象上相邻两个极值点之间的距离是$\frac{\sqrt{16+\pi^2}}{2}$.

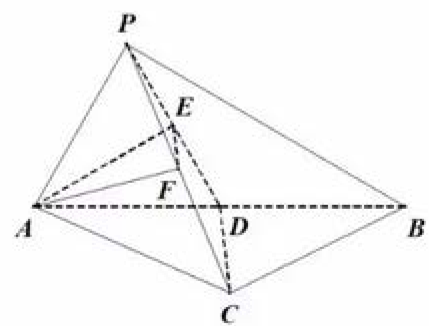
（Ⅰ）求$f(x)$的表达式;

（Ⅱ）设$\triangle ABC$三内角 A、B、C 的对应边分别为 a、b、c,若$a+b=3$,$c=\sqrt{3}$,$f(C)=1$,求$\triangle ABC$的面积.

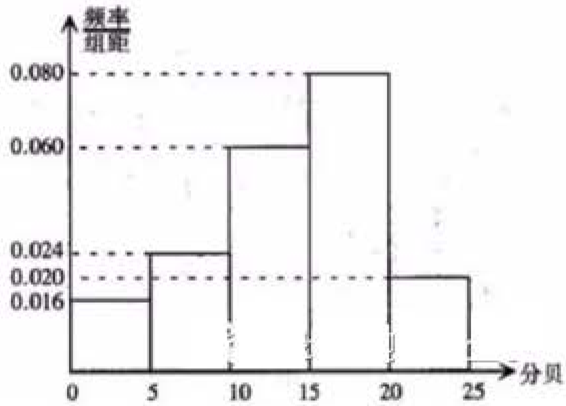
18.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$AP\perp BP$，$AC\perp BC$，$\angle PAB=60^\circ$，$\angle ABC=45^\circ$，D 是 AB 中点，E，F 分别为 PD，PC 的中点.

（Ⅰ）求二面角 $B-PA-C$ 的余弦值;

（Ⅱ）在棱 PB 上是否存在点 M，使得 CM // 平面 AEF？若存在，求 $\dfrac{PM}{PB}$ 的值；若不存在，说明理由.



19．人耳的听力情况可以用电子测听器检测，正常人听力的等级为 0-25 db（分贝），并规定测试值在区间 $(0,5]$ 为非常优秀，测试值在区间 $(5,10]$ 为优秀．某班 50 名同学都进行了听力测试，所得测试值制成频率分布直方图：



（Ⅰ）现从听力等级为 $(0,10]$ 的同学中任意抽取出 4 人，记听力非常优秀的同学人数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅱ）现选出一名同学参加另一项测试，测试规则如下：四个音叉的发生情况不同，由强到弱的次序分别为 1,2,3,4．测试前将音叉随机排列，被测试的同学依次听完后给四个音叉按发音的强弱标出一组序号 a_1，a_2，a_3，a_4（其中 a_1，a_2，a_3，a_4 为 1,2,3,4 的一个排列），

记 $Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$，可用 Y 描述两次排序的偏离程度，求 $Y\le 2$ 的概率．

20．已知椭圆 C: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上下两个焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 与 y 轴垂直的直线交椭圆 C 于 M,N 两点，ΔMNF_2 的面积为 $\sqrt{3}$，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）已知 O 为坐标原点，直线 $y=kx+m$ 与 y 轴交于点 P，与椭圆交于 A,B 两个不同的点，

若存在 m 使得 $\overline{OA}+3\overline{OB}=4\overline{OP}$，求 m 的取值范围．

21．设函数 $f(x)=\ln(x-1)+ax^2+x+1$，$g(x)=(x-1)e^x+ax^2$，$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $g(x)$ 有两个零点，试求 a 的取值范围；

（Ⅲ）证明 $f(x)\le g(x)$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，（$\theta$ 为参数，r 为大于零的常数），以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta+15=0$．

（Ⅰ）若曲线C_1与C_2有公共点,求r的取值范围;

（Ⅱ）若$r=1$,曲线上C_1任意一点P作曲线C_2的切线,切于点Q,求$|PQ|$ 的最大值.

23. 已知函数$f(x)=|x+1|-|x|+a$.

（Ⅰ）若$a=0$，求不等式$f(x)\ge 0$的解集;

（Ⅱ）若方程$f(x)=x$有三个不同的解，求a的取值范围.

华南师大附中2020届高三年级月考（三）

理科数学参考答案

一、选择题：

1—4：DDBD　　5—8：BADC　　9—12：DCCA

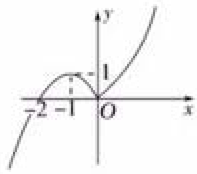
二、填空题

13．3.　　　　14．-64.

15．2.　　　　16．$(1,+\infty)$.

16. 由于关于x的方程$\dfrac{|x|}{x+2}=kx^2$有四个不同的实根，$x=0$是此方程的一个根，

故关于x的方程$\dfrac{1}{x+2}=k|x|$有3个不同的非零的实数解.



$\therefore$方程$\dfrac{1}{k}=\begin{cases}x(x+2), & x>0\\ -x(x+2), & x<0\end{cases}$有3个不同的非零的实数解,

即函数$y=\dfrac{1}{k}$的图象和函数$g(x)=\begin{cases}x(x+2), & x>0\\ -x(x+2), & x<0\end{cases}$的图象有3个交点，画出函数$g(x)$图象，

如图所示，故$0<\dfrac{1}{k}<1$，解得$k>1$.

三、解答题：

17．解：（Ⅰ）$\because \vec{a}=(\sqrt{3}sin\omega x,sin\omega x),\vec{b}=(cos\omega x,sin\omega x)$,

$\therefore f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}=\sqrt{3}sin\omega xcos\omega x+\sin^2\omega x-\frac{1}{2}=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$,

由题意可知其周期为π,

故$\omega=1$,则$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

(Ⅱ)由$f(C)=1$,得$\sin(2C-\frac{\pi}{6})=1\ \because 0<C<\pi$,

$\therefore -\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}, \therefore 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$,解得$C = \frac{\pi}{3}$.

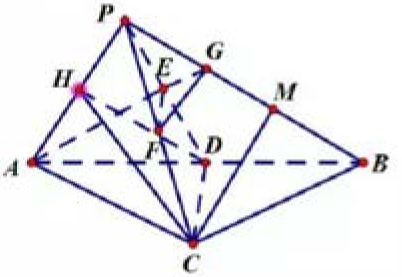
又$\because a + b = 3, c = \sqrt{3}$,由余弦定理得：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}$,

$\therefore (a + b)^2 - 3ab = 3$,即$ab = 2$,

$\therefore$由面积公式得$\triangle ABC$的面积为：$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18．解：几何法

（Ⅰ）由题意知ΔPAB为直角三角形，ΔABC为等腰直角三角形，所以$AB \perp CD$.



即 C 在面PAD上的投影点为 D.过 D 作$DH \perp PA$,连接CH,

由三垂线定理知$\angle DHC$为二面角$B - PA - C$的平面角.

设$AB = 4a$,则$DH = \sqrt{3}a, CD = 2a, CH = \sqrt{CD^2 + DH^2} = \sqrt{7}a$.

$$\cos\angle DHC = \frac{DH}{HC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

（Ⅱ）延长AE交BP于G,连接FG,$\because \angle PAE = 30^\circ \therefore PG = \frac{\sqrt{3}}{3}PA = \frac{1}{3}PB$.

因为平面AEF即为平面AFG,且面PBC过CM.

若CM // 平面AEF，由线面平行的性质定理知必有CM // FG,因为F为PC中点，所以G为PM中点，

即$PG = GM = MB = \frac{1}{3}PB$,所以在棱$PB$上存在点$M$，使得$CM$ // 平面AEF，此时$\frac{PM}{PB} = \frac{2}{3}$.

建系法

（Ⅰ）在△PAB中，取AD中点O，连接PO，所以$PO \perp AB$.

在平面ABC中，过O作CD的平行线，交AC于G.

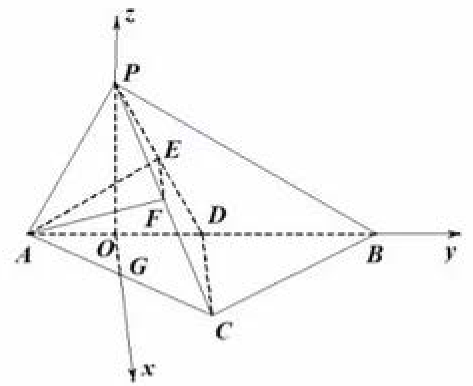
因为平面$PAB \perp$平面ABC，所以$PO \perp$平面ABC,所以$PO \perp OG$.

因为OG, OB, OP两两垂直，如图建立空间直角坐标系$O - xyz$.

设$AB = 4a$，则相关各点坐标为：

$A(0, -a, 0)$，$B(0, 3a, 0)$，$C(2a, a, 0)$，$P(0, 0, \sqrt{3}a)$，$D(0, a, 0)$，$E(0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$，$F(a, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$.

$\overrightarrow{AC}=(2a,2a,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-a,-\sqrt{3}a)$．



设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$．

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$．

平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{DC}=(2a,0,0)$，

设 $\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC}$ 的夹角为 α，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

由图可知二面角 $B-PA-C$ 为锐角，所以二面角 $B-PA-C$ 的余弦值为

（Ⅱ）设 M 是棱 PB 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}$．

因此点 $M(0,3a\lambda,\sqrt{3}a(1-\lambda))$，$\overrightarrow{CM}=(-2a,a(3\lambda-1),\sqrt{3}a(1-\lambda))$．

由（Ⅰ）知 $CD\perp$ 平面 PAB，$AE\perp PD$．所以 $CD\perp PD$．

因为 $EF\,/\!/\,CD$，所以 $EF\perp PD$．

又 $AE\cap EF=E$，所以 $PD\perp$ 平面 AEF．

所以 PD 为平面 AEF 的法向量．$\overrightarrow{PD}=(0,a,-\sqrt{3}a)$．

因为 $CM\not\subset$ 平面 AEF，所以 $CM\,/\!/$ 平面 AEF 当且仅当 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，

即 $(-2a,a(3\lambda-1),\sqrt{3}a(1-\lambda))\cdot(0,a,-\sqrt{3}a)=0$．解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$．

所以在棱 PB 上存在点 M，使得 $CM\,/\!/$ 平面 AEF，此时 $\dfrac{PM}{PB}=\lambda=\dfrac{2}{3}$．

19．解：（Ⅰ）X 的可能取值为：0，1，2，3，4．

$P(X=0)=\dfrac{C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{15}{210}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\dfrac{80}{210}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\dfrac{90}{210}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\dfrac{24}{210}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$．

X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{15}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{1}{210}$

$$E(X)=0\times\frac{15}{210}+1\times\frac{80}{210}+2\times\frac{90}{210}+3\times\frac{24}{210}+4\times\frac{1}{210}=1.6.$$

（Ⅱ）序号 a_1，a_2，a_3，a_4 的排列总数为 $A_4^4=24$ 种，

当 $Y=0$ 时，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$．

当 $Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|=2$ 时，

a_1，a_2，a_3，a_4 的取值为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=3$；

$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=2$，$a_4=4$；$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=4$．

故 $P(Y\le 2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$．

20．解：(Ⅰ)根据已知设椭圆的焦距 2c,当 $y=c$ 时,$|MN|=|x_1-x_2|=\frac{2b^2}{a}$,

由题意得,$\triangle MNF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|MN|\times|F_1F_2|=c|MN|=\frac{2b^2c}{a}=\sqrt{3}$,

又∵ $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $b^2=1,a^2=4$,椭圆 C 的标准方程为：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$.

(Ⅱ) 由 $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$,得 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$,所以 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ ，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+m\\4x^2+y^2-4=0\end{cases}$,得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$,

由已知得 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$,即 $k^2-m^2+4>0$,

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4},x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$.

由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ 得 $x_1=-3x_2$,

$3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$，$\therefore\frac{12k^2m^2}{(k^2+4)^2}+\frac{4(m^2-4)}{k^2+4}=0\Rightarrow m^2k^2+m^2-k^2-4=0$.

显然$m^2=1$不成立，$\therefore k^2=\frac{4-m^2}{m^2-1}$，$\because k^2-m^2+4>0$，$\therefore \frac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$，即$\frac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$.

解得$-2<m<-1$或$1<m<2$.

综上所述，m 的取值范围为$(-2,-1)\cup(1,2)$.

21．解：（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域是$(1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x(2ax-2a+1)}{x-1}$.

当$a=1$时，$f'(2)=4a+2=6$，$f(2)=4a+3=7$.

所以函数$f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为$y-7=6(x-2)$.

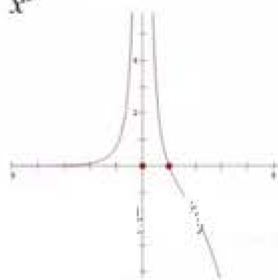
即$y=6x-5$.　　……4 分

（Ⅱ）方法一：若函数$g(x)$有两个零点，则$a=-\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$有两个交点，令$h(x)=-\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

$$[-\frac{(x-1)e^x}{x^2}]'=-\frac{xe^x(x^2)-(x-1)e^x.2x}{x^4}=-\frac{x^2-2x+2}{x^3}e^x=-\frac{(x-1)^2+1}{x^3}e^x.$$

当$x>0$时，$h(x)$单减，当$x<0$时，$h(x)$单增.

其图像如图，故若有两个交点，a的取值范围为$(0,+\infty)$. ……8 分



方法二：函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，由已知得$g'(x)=x(e^x+2a)$.

①当$a=0$时，函数$g(x)=(x-1)e^x$只有一个零点；

②当$a>0$，因为$e^x+2a>0$，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$.

所以函数$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增．又$g(0)=-1$，$g(1)=a$，

因为$x<0$，所以$x-1<0,e^x<1$，所以$e^x(x-1)>x-1$，所以$g(x)>ax^2+x-1$

取$x_0=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，显然$x_0<0$且$g(x_0)>0$

所以$g(0)g(1)<0$，$g(x_0)g(0)<0$．由零点存在性定理及函数的单调性知，函数有两个零点.

③当$a<0$时，由$g'(x)=x(e^x+2a)=0$，得$x=0$，或$x=\ln(-2a)$.

ⅰ）当$a<-\dfrac{1}{2}$，则$\ln(-2a)>0$.

i）当$a<-\frac{1}{2}$，则$\ln(-2a)>0$.

当x变化时，$g'(x),g(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$g'(x)$	+	0	—	0	+
$g(x)$	↗	-1	↘		↗

注意到$g(0)=-1$，所以函数$g(x)$至多有一个零点，不符合题意.

ii）当$a=-\frac{1}{2}$，则$\ln(-2a)=0$，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，函数$g(x)$至多有一个零点，不符合题意.

若$a>-\frac{1}{2}$，则$\ln(-2a)\leq 0$.

当x变化时，$g'(x),g(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	—	0	+
$g(x)$	↗		↘	-1	↗

注意到当$x<0,a<0$时，$g(x)=(x-1)e^x+ax^2<0$，$g(0)=-1$，所以函数$g(x)$至多有一个零点，不符合题意．综上，a的取值范围是$(0,+\infty)$.

（III）证明：$g(x)-f(x)=(x-1)e^x-\ln(x-1)-x-1$.

设$h(x)=(x-1)e^x-\ln(x-1)-x-1$，其定义域为$(1,+\infty)$，则证明$h(x)\geq 0$即可.

因为$h'(x)=xe^x-\frac{x}{x-1}=x(e^x-\frac{1}{x-1})$，取$x_1=1+e^{-3}$，则$h'(x_1)=x_1(e^{x_1}-e^3)<0$，且$h'(2)>0$.

又因为$h''(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{(x-1)^2}>0$，所以函数$h'(x)$在$(1,+\infty)$上单增.

所以$h'(x)=0$有唯一的实根$x_0\in(1,2)$，且$e^{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$.

当$1<x<x_0$时，$h'(x)<0$；当$x>x_0$时，$h'(x)>0$.

所以函数$h(x)$的最小值为$h(x_0)$.　　　　　　……10 分

所以$h(x)\geq h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln(x_0-1)-x_0-1=1+x_0-x_0-1=0$.

所以 $h(x) \ge h(x_0) = (x_0 - 1)e^{x_0} - \ln(x_0 - 1) - x_0 - 1 = 1 + x_0 - x_0 - 1 = 0$.

所以 $f(x) \le g(x)$. ……12 分

（二）22. 解：（1）$\because$ 曲线 $C_1: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，$\therefore$ 消去参数,得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = r^2$ ，

$\because$ 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 8\rho\cos\theta + 15 = 0$

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 1$

若 C_1 和 C_2 有公共点,则 $r - 1 \le 4 \le r + 1$

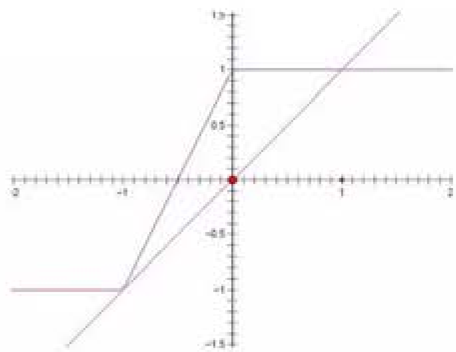
解得 $3 \le r \le 5$,故 r 的取值范围是 $[3,5]$.

（2）设 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$,由 $|PQ|^2 = |PC_2|^2 - |C_2Q|^2 = |PC_2|^2 - 1$

得 $|PQ|^2 = \cos^2\alpha + (\sin\alpha - 4)^2 - 1 = 16 - 8\sin\alpha \le 24$

当且仅当 $\sin\alpha = -1$ 时取最大值,故 $|PQ|$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$.

23.（1）$a = 0$ 时，$f(x) = |x+1| - |x| = \begin{cases} -1, x < -1, \\ 2x+1, -1 \le x < 0, \\ 1, x \ge 0. \end{cases}$



$\therefore$ 当 $x < -1$ 时，$f(x) = -1 < 0$ 不合题意；

当 $-1 \le x < 0$ 时，$f(x) = 2x + 1 \ge 0$，解得 $-\frac{1}{2} \le x < 0$；

当 $x \ge 0$ 时，$f(x) = 1 > 0$ 符合题意.

综上，$f(x) \ge 0$ 的解集为 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

（2）法 1：设 $u(x) = |x+1| - |x|$，$y = u(x)$ 的图象和 $y = x$ 的图象如图，

易知 $y = u(x)$ 的图象向下平移 1 个单位以内（不包括 1 个单位）与 $y = x$ 的图象始终有 3 个交点，

从而 $-1 < a < 0$.

法 2：由题意得 $a = |x| - |x+1| + x$ 有三解，设 $g(x) = |x| - |x+1| + x$，

易得 $g(x) = \begin{cases} x-1, x \ge 0 \\ -x-1, -1 < x < 0 \\ x+1, x \le -1 \end{cases}$，由 $g(x)$ 图像知有三个交点时 $-1 < a < 0$.