

一、选择题(本大题共 18 小题,每小题 3 分,共 54 分。每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,不选、多选、错选均不得分。)

1. 已知集合  $A = \{4, 5, 6\}$ ,  $B = \{3, 5, 7\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\emptyset$                       B.  $\{5\}$                       C.  $\{4, 6\}$                       D.  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

2. 函数  $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x+2}$  的定义域是

- A.  $[-3, +\infty)$                       B.  $(-3, +\infty)$   
C.  $[-3, -2) \cup (-2, +\infty)$                       D.  $[-3, 2) \cup (2, +\infty)$

3.  $\log_3 18 - \log_3 2 =$

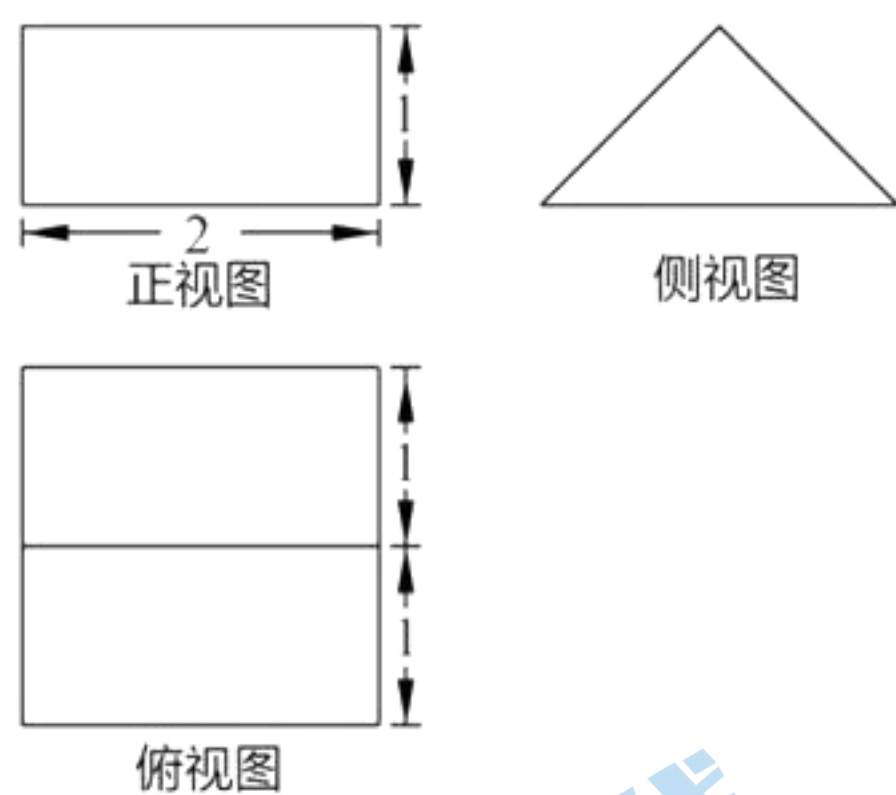
- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

4. 以  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 4)$  为直径端点的圆方程是

- A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$   
B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$   
C.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$   
D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是

- A. 2                      B. 4  
C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}$



(第 5 题图)

6. 不等式  $2^{x-1} < 4$  的解集是

- A.  $(-1, 3)$                       B.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$   
C.  $(-3, 1)$                       D.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

7. 若实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x+y \leq 3, \\ x-y \leq 1, \\ x \geq 1, \end{cases}$  则  $2x+y$  的最大值是

- A. 2                      B. 4                      C. 5                      D. 6

8. 若直线  $l_1: 3x-4y-1=0$  与  $l_2: 3x-ay+2=0 (a \in \mathbf{R})$  平行, 则  $l_1$  与  $l_2$  间的距离是

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$

9. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $2b \sin A = \sqrt{3}a$ , 则  $B =$

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{5\pi}{6}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{2\pi}{3}$

10. 已知平面  $\alpha, \beta$  和直线  $l$ ,

- A. 若  $l // \alpha, l // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$                       B. 若  $l // \alpha, l \subset \beta$ , 则  $\alpha // \beta$   
C. 若  $l \perp \alpha, l \subset \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$                       D. 若  $l \perp \alpha, l \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$

11. 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab \geq \frac{1}{4}$ ”是“ $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ ”的

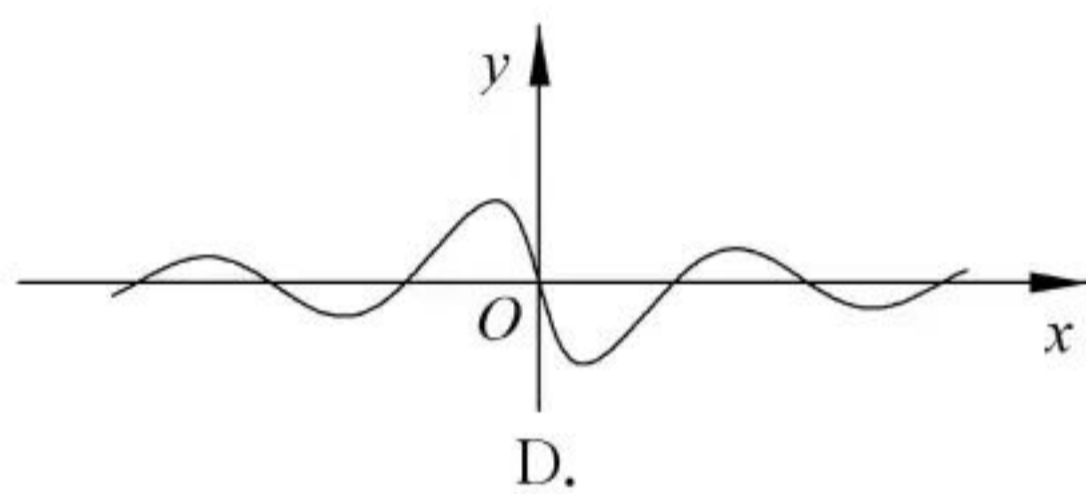
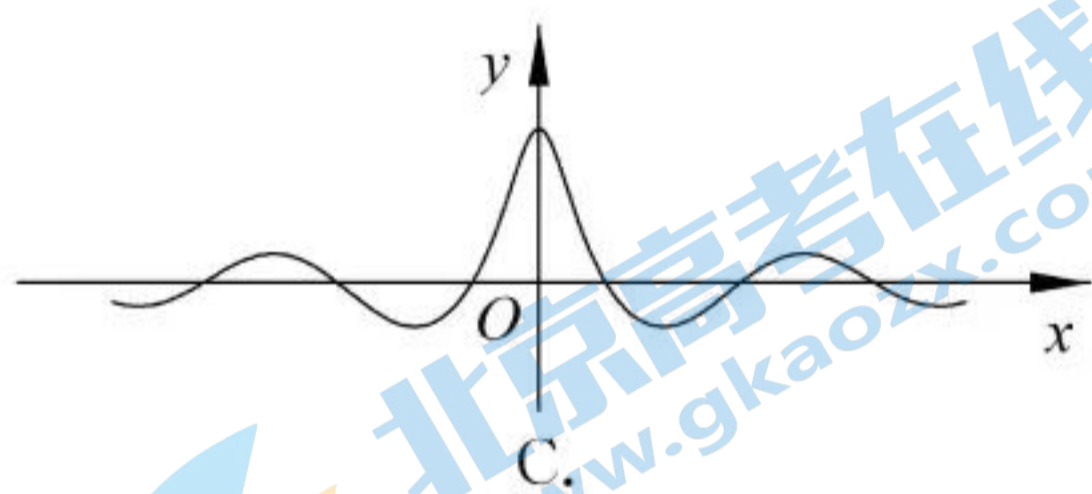
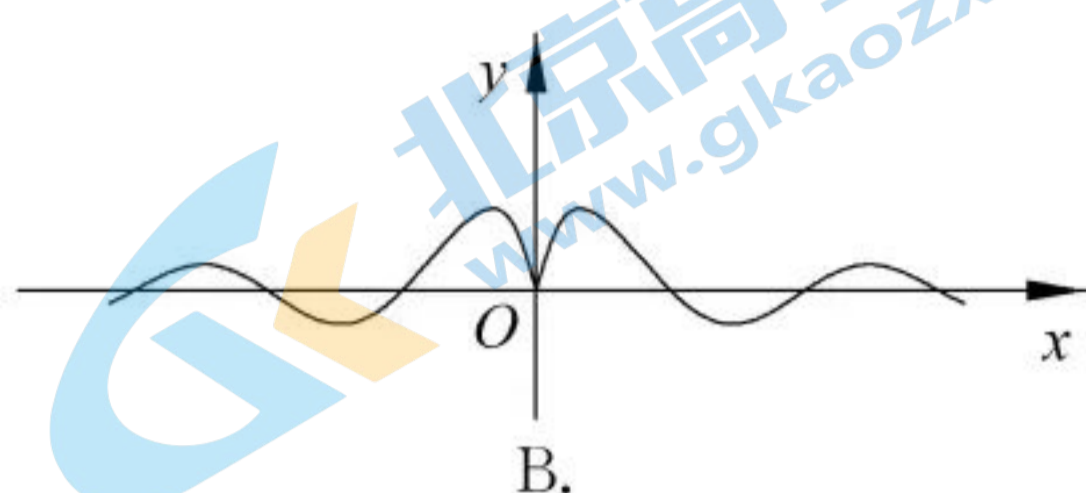
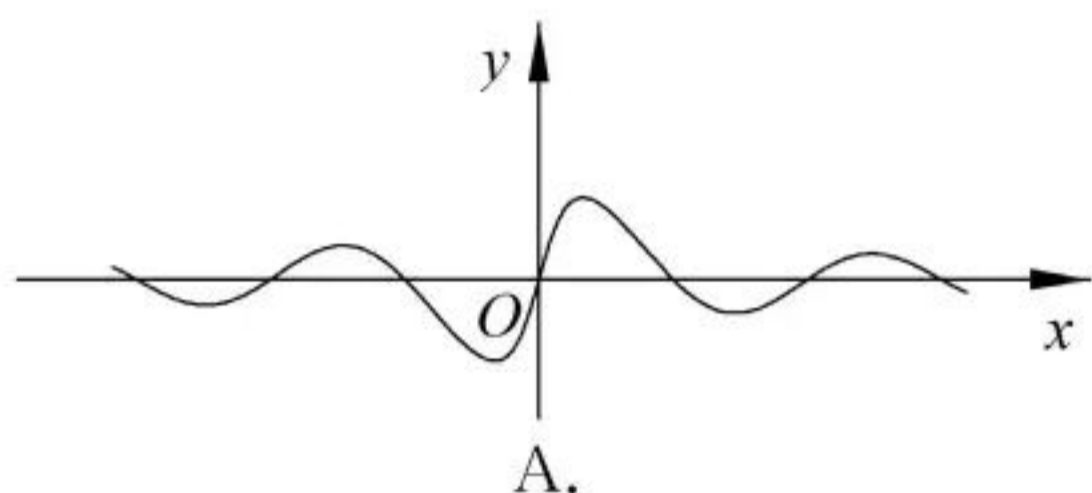
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. 函数  $f(x) = \frac{\sin x}{\ln(x^2 + 2)}$  的图象大致是



13. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $a_1 = -2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}, n \in \mathbf{N}^*$ , 则

A.  $a_{40} < a_{100}$

B.  $a_{40} > a_{100}$

C.  $S_{40} < S_{100}$

D.  $S_{40} > S_{100}$

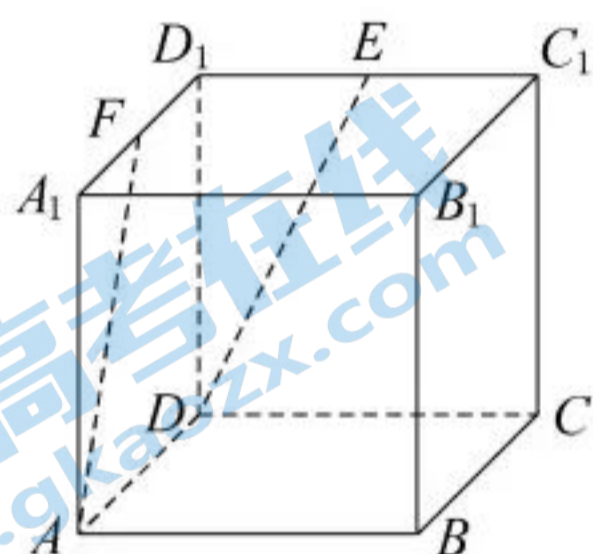
14. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为棱  $C_1D_1, A_1D_1$  的中点, 则异面直线  $DE$  与  $AF$  所成角的余弦值是

A.  $\frac{4}{5}$

B.  $\frac{3}{5}$

C.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$



(第 14 题图)

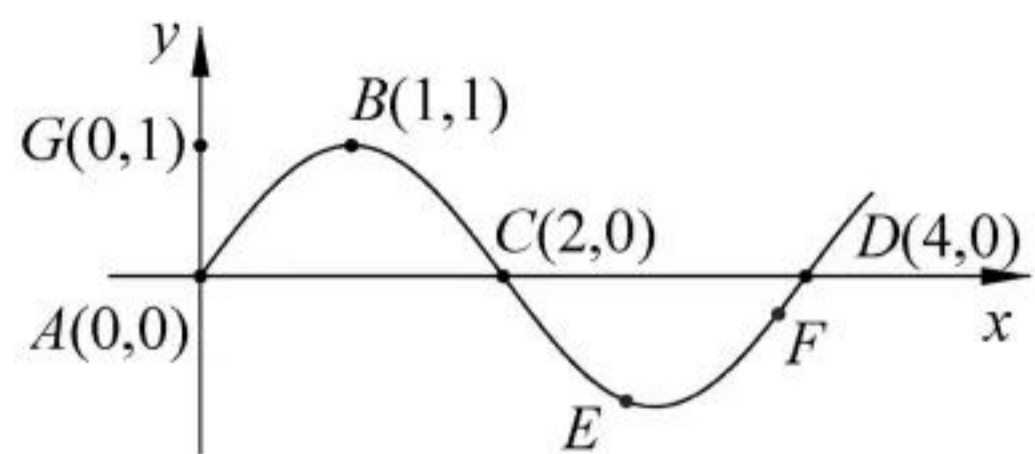
15. 某简谐运动的图象如图所示. 若  $A, B$  两点经过  $x$  秒后分别运动到图象上  $E, F$  两点, 则下列结论不一定成立的是

A.  $\vec{AB} \cdot \vec{GB} = \vec{EF} \cdot \vec{GB}$

B.  $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{EF} \cdot \vec{AG}$

C.  $\vec{AE} \cdot \vec{GB} = \vec{BF} \cdot \vec{GB}$

D.  $\vec{AB} \cdot \vec{EF} > \vec{BF} \cdot \vec{AG}$



(第 15 题图)

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x - \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x^2 + 2x, & x \leq 0, \end{cases}$  则函数  $y = f[f(x) + 1]$  的零点个数是

A. 2

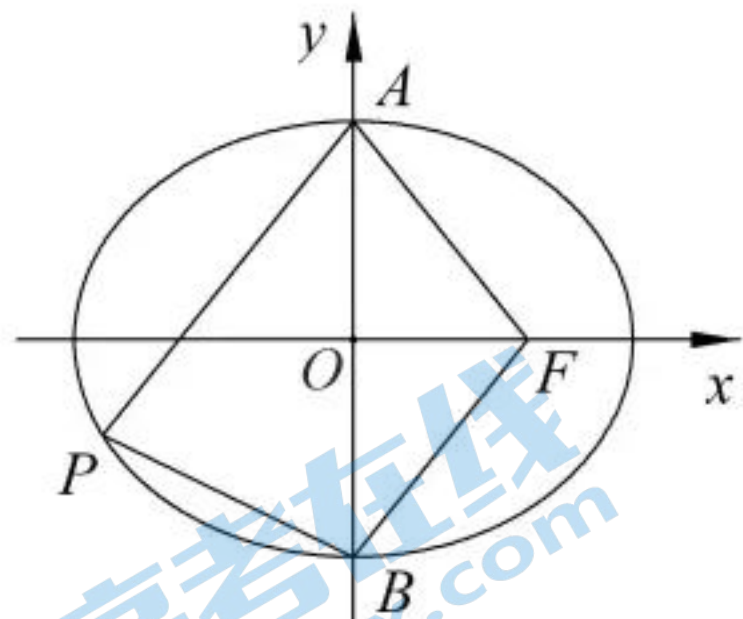
B. 3

C. 4

D. 5

17. 如图,椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ,  $A, B$  分别为椭圆的上、下顶点,  $P$  是椭圆上一点,  $AP \parallel BF$ ,  $|AF| = |PB|$ , 记椭圆的离心率为  $e$ , 则  $e^2 =$

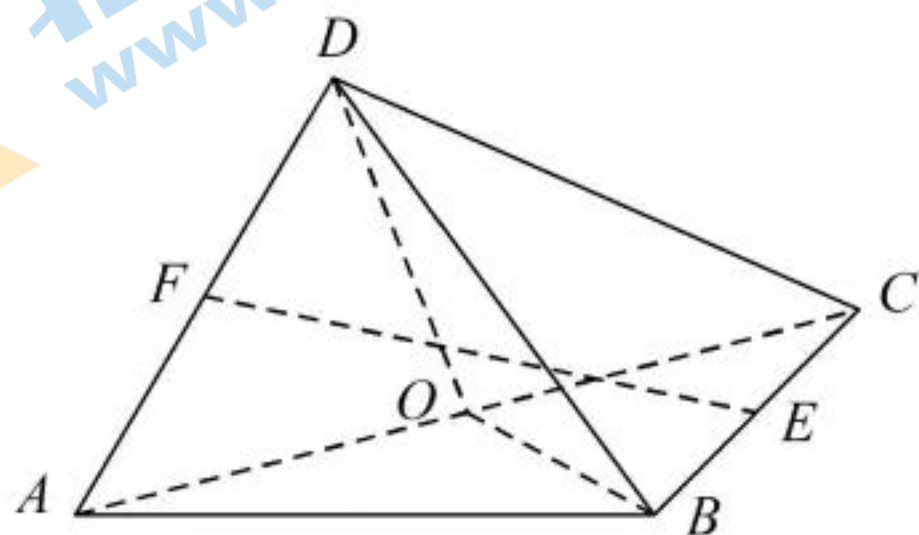
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{17}-1}{8}$   
C.  $\frac{1}{2}$                           D.  $\frac{\sqrt{15}-1}{8}$



(第 17 题图)

18. 如图,在三棱锥  $D-ABC$  中,  $AB = BC = CD = DA$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $E, F, O$  分别为棱  $BC, DA, AC$  的中点, 记直线  $EF$  与平面  $BOD$  所成角为  $\theta$ , 则  $\theta$  的取值范围是

- A.  $(0, \frac{\pi}{4})$                       B.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$   
C.  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$                       D.  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$



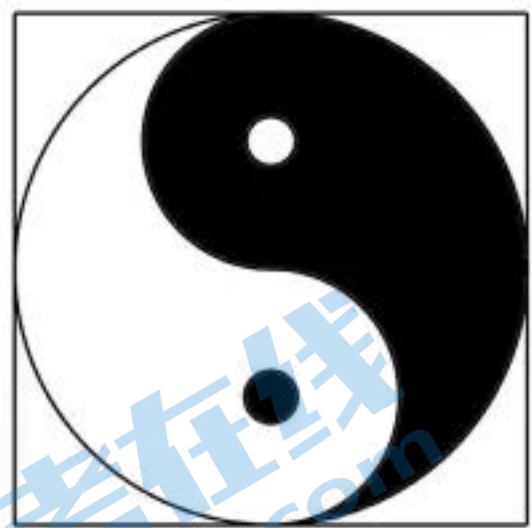
(第 18 题图)

二、填空题(本大题共 4 小题,每空 3 分,共 15 分。)

19. 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_1 = 1, a_4 = 64$ , 则  $q = \blacktriangle$ ,  $S_3 = \blacktriangle$ .

20. 已知平面向量  $a, b$  满足  $|a| = 2, |b| = 1, a \cdot b = -1$ , 则  $|a+b| = \blacktriangle$ .

21. 如图,正方形内的图形来自中国古代的太极图. 勤劳而充满智慧的我国古代劳动人民曾用太极图解释宇宙现象. 太极图由正方形的内切圆(简称大圆)和两个互相外切且半径相等的圆(简称小圆)的半圆弧组成,两个小圆与大圆均内切. 若正方形的边长为 8, 则以两个小圆的圆心(图中两个黑白点视为小圆的圆心)为焦点,正方形对角线所在直线为渐近线的双曲线实轴长是  $\blacktriangle$ .



(第 21 题图)

22. 已知  $a \in \mathbf{R}, b > 0$ , 若存在实数  $x \in [0, 1)$ , 使得  $|bx - a| \leq b - ax^2$  成立, 则  $\frac{a}{b}$  的取值范围是  $\blacktriangle$ .

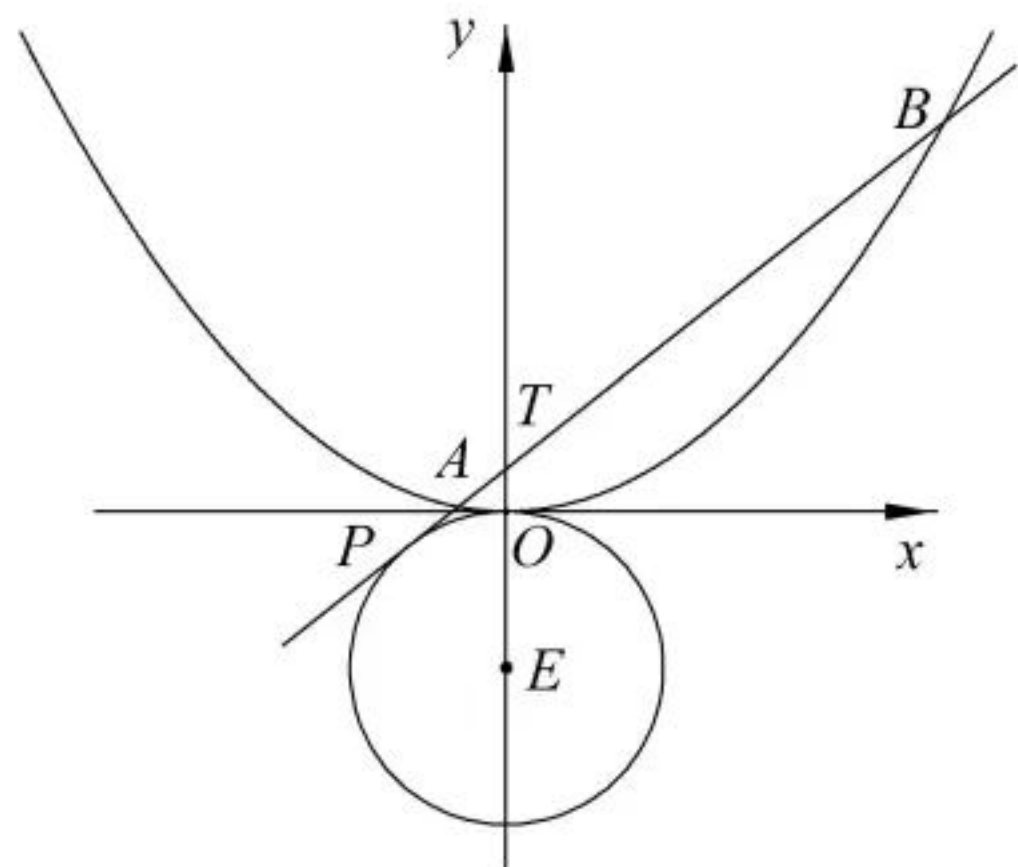
三、解答题(本大题共 3 小题,共 31 分。)

23. (本题满分 10 分) 已知函数  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{6}), x \in \mathbf{R}$ .

- (I) 求  $f(\frac{\pi}{3})$  的值;  
(II) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;  
(III) 当  $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$  时, 求函数  $f(x)$  的值域.

24. (本题满分 10 分) 如图, 直线  $l$  与圆  $E: x^2 + (y+1)^2 = 1$  相切于点  $P$ , 与抛物线  $C: x^2 = 4y$  相交于不同的两点  $A, B$ , 与  $y$  轴相交于点  $T(0, t) (t > 0)$ .

- (I) 若  $T$  是抛物线  $C$  的焦点, 求直线  $l$  的方程;  
(II) 若  $|TE|^2 = |PA| \cdot |PB|$ , 求  $t$  的值.



(第 24 题图)

25. (本题满分 11 分) 设  $a \in [0, 4]$ , 已知函数  $f(x) = \frac{4x-a}{x^2+1}, x \in \mathbf{R}$ .

(I) 若  $f(x)$  是奇函数, 求  $a$  的值;

(II) 当  $x > 0$  时, 证明:  $f(x) \leq \frac{a}{2}x - a + 2$ ;

(III) 设  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 若实数  $m$  满足  $f(x_1) \cdot f(x_2) = -m^2$ , 证明:  $f(m-a) - f(1) < \frac{1}{8}$ .

一、选择题(本大题共 18 小题,每小题 3 分,共 54 分。每小题中只有一个选项是符合题意的,不选、多选、错选均不得分。)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	C	B	D	A	A	C	C	D
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	C	A	A	D	A	B	D	B	C

二、填空题(本大题共 4 小题,每空 3 分,共 15 分。)

19. 4, 21

20.  $\sqrt{3}$

21.  $2\sqrt{2}$

22.  $[-1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}]$

三、解答题(本大题共 3 小题,共 31 分。)

23. (I)  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

即  $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

(II)  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3}),$

故  $f(x)$  的最小正周期  $T = 2\pi;$

(III) 当  $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$  时,  $x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \pi].$

因此当  $x + \frac{\pi}{3} = \pi$ , 即  $x = \frac{2\pi}{3}$  时,  $f(x)_{\min} = \sin \pi = 0;$

当  $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)_{\max} = 1;$

所以  $f(x)$  在  $[0, \frac{2\pi}{3}]$  上的值域为  $[0, 1].$

24. (I) 因为  $T(0, t) (t > 0)$  是抛物线  $C: x^2 = 4y$  的焦点, 所以

$$t = 1.$$

设直线  $l$  的方程为  $y = kx + 1$ , 由直线  $l$  与圆  $E$  相切, 得

$$\frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \text{ 即 } k = \pm\sqrt{3},$$

所以,直线  $l$  的方程为

$$y = \pm\sqrt{3}x + 1.$$

(II) 设直线  $l$  的方程为  $y = kx + t$ ,  $P(x_0, y_0)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} y = kx + t, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$  得  $x^2 - 4kx - 4t = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 4k$ ,  $x_1 \cdot x_2 = -4t$ , 所以

$$\begin{aligned} |PA| \cdot |PB| &= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_0| \cdot \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_0| \\ &= (1+k^2) [-x_1x_2 - x_0(x_1+x_2) + x_0^2] \\ &= (1+k^2) [-x_0^2 - 4(kx_0+t)] \\ &= (1+k^2)(x_0^2 - 4y_0). \end{aligned}$$

由直线  $l$  与圆  $E$  相切, 得  $\frac{|t+1|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$ , 即

$$1+k^2 = (t+1)^2.$$

由  $|TE| = t+1$ ,  $|TE|^2 = |PA| \cdot |PB|$ , 得

$$(1+k^2)(x_0^2 - 4y_0) = (t+1)^2.$$

所以  $x_0^2 - 4y_0 = 1$ , 又  $x_0^2 + (y_0 + 1)^2 = 1$ , 解得  $y_0 = -3 + 2\sqrt{2}$ .

由直线  $l$  与  $PE$  互相垂直, 得  $k = -\frac{1}{k_{PE}} = -\frac{x_0}{y_0 + 1}$ ,

$$\begin{aligned} t = y_0 - kx_0 &= y_0 + \frac{x_0^2}{y_0 + 1} \\ &= \frac{x_0^2 + y_0^2 + y_0}{y_0 + 1} = \frac{-y_0}{y_0 + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$

25. (I) 由题意, 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ ,

即  $\frac{4(-x) - a}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4x - a}{x^2 + 1}$ , 亦即  $-4x - a = -4x + a$ , 因此

$$a = 0;$$

(II) 证明: 因为  $x > 0$ ,  $0 \leq a \leq 4$ ,

$$\begin{aligned} \frac{4x - a}{x^2 + 1} - \left(\frac{a}{2}x - a + 2\right) &= \frac{4x - a - \left(\frac{a}{2}x - a + 2\right)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 1)} [-ax(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 - 2x + 1)] \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 1)} (ax + 4)(x - 1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

所以,  $f(x) \leq \frac{a}{2}x - a + 2$ .

(III) 设  $t = 4x - a$ , 则  $y = \frac{4x - a}{x^2 + 1} = \frac{16t}{t^2 + 2at + a^2 + 16}$  ( $t \in \mathbf{R}$ ),

当  $t = 0$  时,  $y = 0$ ;

当  $t \neq 0$  时,  $y = \frac{16}{t + \frac{a^2 + 16}{t} + 2a}$ ;

$$f(x)_{\max} = \frac{8}{a + \sqrt{a^2 + 16}} > 0, f(x)_{\min} = \frac{8}{a - \sqrt{a^2 + 16}} < 0,$$

所以  $\frac{8}{a - \sqrt{a^2 + 16}} \leq f(x) \leq \frac{8}{a + \sqrt{a^2 + 16}}$ .

由  $f(x_1) \cdot f(x_2) = -m^2$  得  $-m^2 \geq f(x)_{\max} \cdot f(x)_{\min} = -4$ , 即  $-2 \leq m \leq 2$ .

① 当  $m - a \leq 0$  时,  $f(m - a) \leq 0$ ,  $f(1) = \frac{4 - a}{2} \geq 0$ , 所以

$$f(m - a) - f(1) < \frac{1}{8};$$

② 当  $m - a > 0$  时, 由 (II) 知,

$$f(m - a) - f(1) \leq \frac{a}{2}(m - a) - a + 2 - \frac{4 - a}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(m - a - 1) \leq \frac{a}{2}(1 - a) \leq \frac{1}{8}, \text{ 等号不能同时成立.}$$

综上所述可知  $f(m - a) - f(1) < \frac{1}{8}$ .

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯