1号卷·A10联盟2022届高三开年考

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. ）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	D	B	B	B	A	C	C	B	D

1. D 由题意得，$M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$N=\{0,1\}$，则 $M\cap N=\{0,1\}$，故选 D.

2. A 由题意得，$z(1+\mathrm{i})=(3-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=5+\mathrm{i}$，则其实部为 5. 故选 A.

3. C 由题意得，函数 $f(x)=2^{-\left|x+\frac{1}{2}\right|}$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称，$f(0)=2^{-\frac{1}{2}}<1$，故选 C.

4. D $\cos^2 1785^\circ-\cos^2 1875^\circ=\cos^2(-15^\circ)-\cos^2 75^\circ=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

5. B 由题意得，这条渐近线的斜率为 $\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=2$.故选 B.

6. B 因为 $c=\ln e^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，$a=\log_{29}3=\log_{29}27^{\frac{1}{3}}<\log_{29}29^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，

$b=\log_{50}4=\log_{50}64^{\frac{1}{3}}>\log_{50}50^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，所以 $a<c<b$. 故选 B.

7. B 设等比数列的公比为 q，则 $\dfrac{a_6+a_7+a_8}{S_3}=\dfrac{a_6+a_7+a_8}{a_1+a_2+a_3}=q^5=32$，解得 $q=2$，

$\therefore \dfrac{S_5}{a_3}=\dfrac{a_1(1-q^5)}{a_1q^2(1-q)}=\dfrac{31}{4}$，故选 B.

8. A 令 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 为连续函数，且 $f(1)=1>0$，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上存在零点，故方程 $2^x=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上有解，所以命题 p 为真命题. $ax^2+ax+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，当 $a=0$ 时，$1>0$ 显然成立，当 $a\neq 0$ 时，则 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=a^2-4a<0\end{cases}$，解得 $0<a<4$，综上 $0\leqslant a<4$，所以命题 q 为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题，$(\neg p)\wedge q$、$p\wedge(\neg q)$、$\neg(p\vee q)$ 为假命题. 故选 A.

9. C　由题意得，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}$，则 $T=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=3$，$\therefore f(x)=4\sin(3x+\varphi)$.

$\because f(0)=4\sin\varphi=2\sqrt{2}$，$\therefore \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore f(x)=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 3x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，解得

$\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(k\in \mathbf{Z})$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right]$ $(k\in \mathbf{Z})$. 故选 C.

10. C　由题意得，$g(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2x+2+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$，故函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-1,2)$ 中心对称；易验证 $f(-x)+f(-2+x)=4$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象也关于点 $(-1,2)$ 中心对称，$\therefore x_1+x_2+y_1+y_2=-2+4=2$. 故选 C.

11. B　$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB // CD$，$\therefore \angle PAB$ 即为所求异面直线 PA 与 CD 所成角，由 $PA^2+PC^2=4R^2$，$\tan\angle PAC=\frac{1}{2}$ 可得 $PA=\frac{4R}{\sqrt{5}}$，$AB=\sqrt{2}R$.

又 $\angle PBD=45°$，$\therefore PB=PD$，$\therefore PO\perp BD$，$\therefore PB=\sqrt{2}R$，

$\therefore \cos\angle PAB=\frac{\frac{2R}{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}R}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. 故选 B.

12. D　由题意得，$f'(x)=-4\sin x-mx^2$，又 $f'(x)\geqslant 0$，则 $-4\sin x-mx^2\geqslant 0$，

$\therefore -\frac{4\sin x}{x^2}\geqslant m$. 令 $g(x)=-\frac{4\sin x}{x^2}$，可知当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 时，$g(x)<0$，当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时，$g(x)\geqslant 0$，当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 时，$g'(x)=\frac{4}{x^3}(2\sin x-x\cos x)>0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{32\sqrt{2}}{9\pi^2}$，则

$m\leqslant-\frac{32\sqrt{2}}{9\pi^2}$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{32\sqrt{2}}{9\pi^2}\right]$. 故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. $-\frac{5}{3}$

由题意得，$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,2+\lambda)$，$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=1+\lambda+2(2+\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{5}{3}$.

14. $\dfrac{3}{4}$

由题意得，该3阶幻方每行、每列和对角线上的数字之和均等于15，从中随机抽取三个数，数字之和等于15，基本事件总数为8，易知事件“含有数字5或6”包含的基本事件数为6，故所求事件的概率为 $\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

15. 17π

由三视图可得原几何体为球体去除自身的 $\dfrac{1}{8}$ 后的部分，设球的半径为 R，则

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{28\pi}{3}$，解得 $R=2$，所以该几何体的表面积为

$S=\dfrac{7}{8}\times4\pi\times2^2+3\times\dfrac{1}{4}\pi\times2^2=17\pi$.

16. 12

由 $3\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FN}=\mathbf{0}$ 知，M 为线段 FN 上靠近 F 的三等分点，过点 M 作 $MM'\perp l$ 于点 M'，$\therefore |MM'|=|MF|=\dfrac{2}{3}p$，$\because 2|MF|-p=4$，$\therefore \dfrac{4}{3}p-p=4$，解得 $p=12$.

三、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分12分）

（Ⅰ）根据统计数据，可得 2×2 列联表如下表：

	表示满意	表示不满意	总计
男性	60	45	105
女性	30	45	75
总计	90	90	180

………………………… 3分

则 $K^2=\dfrac{180\times(60\times45-30\times45)^2}{105\times75\times90\times90}=\dfrac{36}{7}\approx5.143>5.024$，………………………… 5分

故能够在犯错误的概率不超过0.025的前提下认为客户的满意程度与性别有关.

………………………… 6分

（Ⅱ）由题意得，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=90$，$\bar{x}=4$，………………………… 7分

则 $\hat{b}=\dfrac{27400-4\times4000}{90-80}=1140$，$\hat{a}=800-1140\times4=-3760$，………… 11分

$\therefore y$ 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=1140x-3760$. ………………………… 12分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because T_{n+1}=\dfrac{(n+2)a_nT_n}{n}$，$\therefore \dfrac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}=\dfrac{(n+2)a_n}{n}$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}$，…… 2 分

由累乘法得，

$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\cdots\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n+1}{n-1}\cdot\dfrac{n}{n-2}\cdot\dfrac{n-1}{n-3}\cdots\cdots\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{3}{1}\cdot 2=(n+1)n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也满足上式，$\therefore a_n=n^2+n$． ………………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=n^2+n$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$， ………………… 8 分

则 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$． … 12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）取 AC 的中点 O，连接 BO，DO，故 BO 为 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BO\perp AC$，$DO\perp AC$． ………………………… 1 分

设点 F 是点 E 在平面 ABC 上的射影，由题意得，点 F 在 BO 上．

连接 EF，则 $EF\perp$ 平面 ABC． ………………………… 2 分

$\because$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$，$DO\subset$ 平面 ACD，

$DO\perp AC$，$\therefore DO\perp$ 平面 ABC，$\therefore DO\,/\!/\,EF$． ………………………… 3 分

$\because\triangle ABC$ 是面积为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形，$\therefore AB=4$，

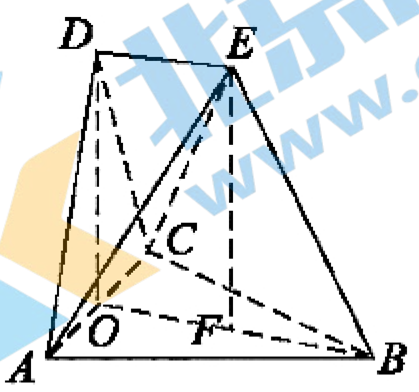
$\because$ 直线 BE 与平面 ACD 所成角的大小为 30°，即 $\angle BEF=30^\circ$，$\therefore EF=2\sqrt{3}$，

又 $DO=2\sqrt{3}$，$\therefore$ 四边形 $EFOD$ 为平行四边形，$\therefore DE\,/\!/\,BO$． ……………… 6 分

$\because BO\subset$ 平面 ABC，$DE\not\subset$ 平面 ABC，$\therefore DE\,/\!/$ 平面 ABC． ……………… 7 分

（Ⅱ）设点 B 到平面 ADE 的距离为 d．

由 $V_{B-ADE}=V_{A-BDE}$ 得 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot 2$，



即 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot DE\cdot d=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot DE\cdot DO\cdot 2$，

解得 $d=\sqrt{3}$． ………………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）当 $m=-1$ 时，$f(x)=x\left(e^x-1\right)+1$，

则 $f(1)=e$，$f'(x)=(x+1)e^x-1$，$\therefore f'(1)=2e-1$， ………………………… 2 分

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=(2e-1)(x-1)$，

即 $(2e-1)x-y-e+1=0$． ………………………… 4 分

（Ⅱ）由题意得，$m\leqslant x\left(e^x-1\right)-\ln x+2$． ……………………… 5 分

令 $F(x)=x\left(e^x-1\right)-\ln x+2(x>0)$，则 $F'(x)=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$. ………… 6 分

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，易得 $h(x)$ 为单调递增函数，且 $h\left(\frac{1}{2}\right)<0, h(1)>0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0=-\ln x_0$，…………… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$F'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$F'(x)>0$，

则 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，……………………… 9 分

$\therefore F(x)_{\min}=F(x_0)=x_0\left(e^{x_0}-1\right)-\ln x_0+2=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+2$

$=1-x_0+x_0+2=3$，……………………… 11 分

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty,3]$. ……………………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $ab=\sqrt{2}$ ①，……………………… 1 分

$\because |EF|=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$\therefore\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ 在椭圆 C 上，代入可得 $\frac{1}{4a^2}+\frac{7}{8b^2}=1$ ②，……… 2 分

联立①②，解得 $a^2=2$，$b^2=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$B(0,1)$，若直线 EF 的斜率不存在，设 $E(s,t)$，$F(s,-t)$，

此时 $k_{BE}\cdot k_{BF}=\frac{t-1}{s}\cdot\frac{-t-1}{s}=\frac{1-t^2}{s^2}=\frac{\frac{1}{2}s^2}{s^2}=\frac{1}{2}$，

与题设矛盾，故直线 EF 的斜率必存在. ……………………… 6 分

设直线 EF 的方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，

得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4mkx+2m^2-2=0$，$\Delta=8\left(2k^2-m^2+1\right)>0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4mk}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$，（*） ……………………… 8 分

$\therefore k_{BE}\cdot k_{BF}=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2}$

$=\frac{k^2x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2}{x_1x_2}=\frac{1}{6}$，……………………… 9 分

将（*）式代入上式，整理得 $m^2-3m+2=0$，……………………… 11 分

解得 $m=2$ 或 $m=1$（舍去），即直线 EF 过定点 $(0,2)$. ………………………… 12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$（其中 φ 为参数），

转换为普通方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\dfrac{\rho^2\cos^2\theta}{2}+\rho^2\sin^2\theta=1$，

整理得 $\rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\theta}$. ………………………… 3 分

同理，得曲线 $C_2: x^2-2x+y^2=0$ 的极坐标方程为 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，即 $\rho=2\cos\theta$.

………………………… 5 分

（Ⅱ）联立 $\begin{cases} \theta=\alpha=\dfrac{\pi}{3} \\ \rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\theta} \end{cases}$，得 $|OA|^2=\rho_A{}^2=\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{8}{7}$，$\therefore |OA|=\rho_A=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$，

………………………… 7 分

联立 $\begin{cases} \theta=\alpha=\dfrac{\pi}{3} \\ \rho=2\cos\theta \end{cases}$，得 $|OB|=\rho_B=1$，………………………… 9 分

$\therefore |AB|=|OA|-|OB|=\dfrac{2\sqrt{14}-7}{7}$. ………………………… 10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$|4x-3|+|4x+5|>10$，

当 $x<-\dfrac{5}{4}$ 时，不等式化为 $3-4x-4x-5>10$，解得 $x<-\dfrac{3}{2}$，$\therefore x<-\dfrac{3}{2}$；

当 $-\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时，不等式化为 $3-4x+4x+5>10$，无解；

当 $x>\dfrac{3}{4}$ 时，不等式化为 $4x-3+4x+5>10$，解得 $x>1$，$\therefore x>1$，

则不等式 $f(x)>10$ 的解集为 $\left\{x \middle| x<-\dfrac{3}{2}\text{或}x>1\right\}$. ………………………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $-\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，且 $f(x)_{\min}=8$，即 $f(x)\geqslant 8$.

………………………… 6 分

$\because \left(\sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2 \leqslant 2\left[\left(\sqrt{m+1}\right)^2+\left(\sqrt{2n+1}\right)^2\right]=2(m+1+2n+1)=8$，

当且仅当 $m=2n=1$ 时等号成立，$\therefore \sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant 2\sqrt{2}$，………………… 8 分

$\therefore 2^{\sqrt{m+1}}\cdot 2^{\sqrt{2n+1}}=2^{\sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}}\leqslant 2^{2\sqrt{2}}<2^3=8$，即 $2^{\sqrt{m+1}}\cdot 2^{\sqrt{2n+1}}<f(x)$.

………………………… 10 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。