高三数学

满分：150 分　　考试时间：120 分钟

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔书写，字体工整、笔迹清晰。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{-3,-2,0,1,2\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{x^2-x-6}\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-3,-2,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-3,-2\}$　　D. $\{2\}$

2. 已知 $z\cdot(1+i)=1-i$，则 $\bar{z}-z=$

A. $-2i$　　B. $2i$　　C. -2　　D. 2

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则下列关系一定成立的是

A. $\lambda\mu=-1$　　B. $\lambda-\mu=2$　　C. $\lambda+\mu=0$　　D. $\lambda\mu=1$

4. 已知函数 $f(x)=\ln(x^2-ax)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 某种化学物质的衰变满足指数函数模型，每周该化学物质衰减 20%，则经过 n 周后，该化学物质的存量低于该化学物质的 $\frac{1}{5}$，则 n 的最小值为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

6. $(x+y)^5(x-y)^6$ 的展开式中 x^4y^7 的系数为

A. 10　　B. -10　　C. 20　　D. -20

7. 已知过点 $A(2,0)$ 与圆：$x^2+y^2-4y-1=0$ 相切的两条直线分别是 l_1,l_2，若 l_1,l_2 的夹角为 α，则 $\tan\alpha=$

A. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $-\sqrt{15}$　　D. $\sqrt{15}$

8. 下列不等关系中错误的是

A. $\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$　　B. $be^a>ae^b\,(a>b>1)$

C. $\cos\frac{1}{4}<\frac{31}{32}$　　D. $\sin\frac{7}{2}+\frac{7}{2}>\pi$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列判断中正确的是

A. 一组从小到大排列的数据 $-1,1,3,5,6,7,9,x,10,10$，去掉 x 与不去掉 x，它们的 80% 分位数都不变，则 $x=10$

B. 两组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m$ 与 $y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n$，设它们的平均值分别为 E_x 与 E_y，将它们合并在一起，则总体的平均值为 $\frac{m}{m+n}E_x+\frac{n}{m+n}E_y$

C. 已知离散型随机变量 $X\sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$，则 $D(2X+3)=3$

D. 线性回归模型中，相关系数 r 的值越大，则这两个变量线性相关性越强

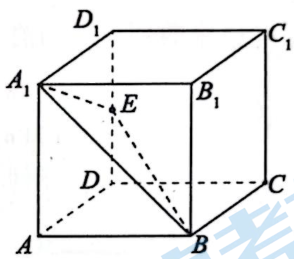
10. 下列函数中均满足下面三个条件的是

①$f(x)$ 为偶函数　②$f(x)<1$　③$f(x)$ 有最大值

A. $f(x)=\cos x$　B. $f(x)=\left|\frac{1}{2}\sin x\right|$

C. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+1}$　D. $f(x)=1-2^{|x|}$

11. 如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 的中点，点 F 在该正方体的侧面 CDD_1C_1 上运动，且满足 $B_1F//$平面 A_1BE. 下列说法正确的是



A. 点 F 轨迹是长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的线段

B. 三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积为定值 $\frac{1}{2}$

C. 存在一点 F，使得 $B_1F\perp CD_1$

D. 直线 BC 与直线 B_1F 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}}{2}$，则下列说法正确的是

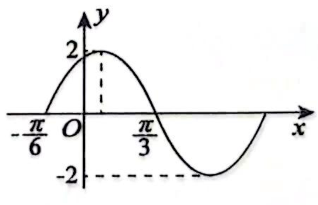
A. $a_{2024}>a_{2023}$　B. $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 为递增数列

C. $4a_{n+1}^2-1=4a_{n+1}a_n$　D. $a_{2024}^2<1013$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某校思想品德课教师一天有 3 个不同班的课，每班一节，如果该校一天共 7 节课，上午 4 节，下午 3 节，该教师的 3 节课任意两节都不能连着上（第四节和第五节不算连着上），则该教师一天的课所有不同的排法有________种.

14. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，



则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 在双曲线 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1B}\perp\overrightarrow{F_2B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-2\overrightarrow{F_2B}$，则双曲线 C 的离心率为________.

16. 现有一个底面边长为 $2\sqrt{3}$，高为 4 的正三棱柱形密闭容器，在容器中有一个半径为 1 的小球，小球可以在正三棱柱形容器中任意运动，则小球未能达到的空间体积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $\sin A-\sin B=\sin(C-B)$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{6}c^2$，求 $\frac{c}{b}$ 的值.

18.（12 分）

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_n^2+2a_n=4S_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

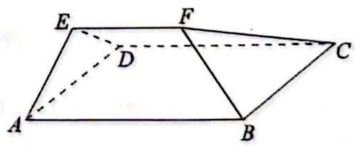
（2）令 $b_n=\frac{4n+8}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)2^{n+1}}$，求 b_n 的前 9 项之和.

19.（12 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2AD=2EF=4$，$AE=DE=\sqrt{2}$.

（1）求该五面体的体积；

（2）请判断在棱 BF 上是否存在一点 G，使得 AG 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$？若存在，求 BG 的长；若不存在，请说明理由.



20. (12 分)

编号为 1,2,3,4 的四名同学一周内课外阅读的时间(单位:h)用 $t_{(i)}(i=1,2,3,4)$ 表示,$t_{(1)}=5$,$t_{(2)}=6$,$t_{(3)}=7$,$t_{(4)}=8$,将四名同学的课外阅读时间看成总体,则总体的均值为 6.5 h. 先后随机抽取两个 $t_{(i)}$ 值,用这两个值的均值来估计总体均值.

(1)若采用有放回的方式抽样(两个 $t_{(i)}$ 值可以相同),则样本均值的可能取值有多少个?写出样本均值的分布列并求其数学期望;

(2)若采用无放回的方式抽样,则样本均值超过总体均值的概率会不会大于 0.5?

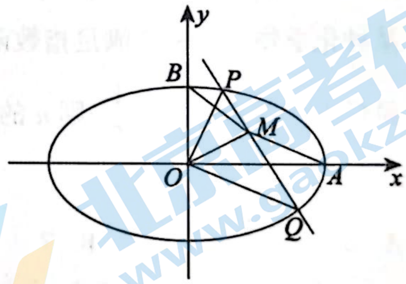
(3)若考虑样本均值与总体均值的差的绝对值不超过 0.5 的概率,那么采用哪种抽样方法概率更大?

21. (12 分)

已知椭圆具有如下光学性质:从椭圆的一个焦点发出的光线射向椭圆上任一点,经椭圆反射后必经过另一个焦点. 若从椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1 发出的光线,经过两次反射之后回到点 F_1,光线经过的路程为 8,椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)如图,若椭圆 C 的右顶点为 A,上顶点为 B,动直线 l 交椭圆 C 于 P、Q 两点,且始终满足 $OP\perp OQ$,作 $OM\perp PQ$ 交 PQ 于点 M,求 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值.



22. (12 分)

已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,若 $f(x)=e^x$,构造函数 $p(x)=xf(x)+ag(x)$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $p(x)$ 在点 $(1,p(1))$ 处的切线与坐标轴围成三角形的面积;

(2)若 $r(x)=(x+1)f(x)-g'(x)$(其中 $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数),当 $a=-1$ 时,$(t+1)r(t)=p(t)$,证明:$\frac{5}{9}<t<\frac{5}{3e}$.(参考数据:$\ln3\approx1.099$,$\ln5\approx1.609$)