

下学期数学统练一

(高 21 级) 2024.2

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题 共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $A \subseteq B$, 则 B 可以为()

- (A) $\{3\}$ (B) $\{1, 3, 4\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{1, 2, 3\}$

(2) 已知复数 z 满足 $\bar{z} - z = 2i$, 则 z 的虚部为()

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

(3) 工人师傅在检测椅子的四个“脚”是否在同一个平面上时, 只需连接对“脚”的两条线段, 看它们是否相交, 就知道它们是否合格. 工人师傅运用的数学原理是()

- (A) 两条相交直线确定一个平面 (B) 两条平行直线确定一个平面
(C) 四点确定一个平面 (D) 直线及直线外一点确定一个平面

(4) 若函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x < 0, \\ bx-1, & x > 0 \end{cases}$ 是奇函数, 则()

- (A) $a=1, b=-1$ (B) $a=-1, b=1$
(C) $a=1, b=1$ (D) $a=-1, b=-1$

(5) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 若 $a^2 - b^2 = bc$, $\sin C = 2\sin B$, 则 A 等于()

- (A) $\frac{5\pi}{6}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

(6) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点,

$|AF| = 2|BF|$, 则()

- (A) $|BF| = \frac{1}{3}p$ (B) $|BF| = \frac{1}{2}p$ (C) $|BF| = \frac{2}{3}p$ (D) $|BF| = \frac{3}{4}p$

(7) 在无穷项等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项的和, 则“ $\{a_n\}$ 既有最大值, 又有最小值”

是“ $\{S_n\}$ 既有最大值, 又有最小值”的()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

(8) 已知关于 x 的方程 $|2^x - a| = \frac{a}{2^x}$ 有 3 个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为()

- (A) (0,2) (B) (2,4) (C) (2, +∞) (D) (4, +∞)

(9) 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 若 $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, 则称点

A 和点 B 互为等差点. 已知点 Q 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一点, 若直线 $x = 2\sqrt{2}$ 上存在点 Q 的等差点 P , 则 $|OP|$ 的取值范围为()

- (A) $[2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$ (B) $[\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ (C) $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{10}]$ (D) $[2\sqrt{2}, 8]$

(10) 平面内互不重合的点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4$, 若 $|\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3}| = i$, 其

中 $i=1, 2, 3, 4$, 则 $|B_1B_2| + |B_2B_3| + |B_3B_4|$ 的取值范围为()

- (A) $[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$ (B) $[\frac{4}{3}, \frac{16}{3}]$ (C) $[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}]$ (D) $[1, 5]$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 已知 $(x-1)^3 + (x+1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_2 =$ _____.

(12) 双曲线 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的离心率为_____.

(13) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 前 n 项和记为 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 满足

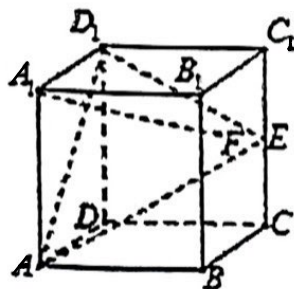
$3a_2 + 2a_3 = S_3 + 6$, 若数列 $\{S_n\}$ 为单调递增数列, 则公差 d 的

取值范围为_____.

(14) 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 CC_1 的中点, F

是侧面 BCC_1B_1 内的动点, 且 $A_1F \parallel$ 平面 D_1AE , 若正

方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 2, 则线段 A_1F 的最



小值_____.

(15) 海水受日月的引力, 会发生潮汐现象. 在通常情况下, 船在涨潮时驶入航道, 进入港口, 落潮时返回海洋. 某兴趣小组通过 AI 技术模拟在一次潮汐现象下货船出入港口的实验: 首先, 设定水深 y (单位: 米) 随时间 x (单位: 小时) 的变化规律为

$y = 0.8\sin\omega x + 2$ ($\omega \in \mathbf{R}$), 其中 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{\omega}$; 然后, 假设某虚拟货船空载时吃水深度 (船底与水面的距离) 为 0.5 米, 满载时吃水深度为 2 米, 卸货过程中, 随着货物卸载, 吃水深度以每小时 0.4 米的速度减小; 并制定了安全条例, 规定船底与海底之间至少要有 0.4 米的安全间隙.

在此次模拟实验中, 若货船满载进入港口, 那么以下结论正确的是_____.

① 若 $\omega = \frac{\pi}{6}$, 货船在港口全程不卸货, 则该船在港口至多能停留 4 个小时;

② 若 $\omega = \frac{\pi}{6}$, 该货船进入港口后, 立即进行货物卸载, 则该船在港口至多能停留 4 个小时;

③ 若 $\omega = 1$, 货船于 $x = 1$ 时进入港口后, 立即进行货物卸载, 则 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 船底离海底的距离最大;

④ 若 $\omega = 1$, 货船于 $x = 1$ 时进入港口后, 立即进行货物卸载, 则 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, 船底离海底的距离最大.

三、解答题 共 6 道小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \cos 2x + a \sin x$, $f(\frac{\pi}{2}) = -2$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设 $g(x) = \sqrt{2}f(x - \frac{\pi}{4}) + 2\sin x$, 求 $g(x)$ 的取值范围.

(17) (本小题 13 分)

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC , ΔABC 为正三角形, D, E 分别为 BC 和 A_1C_1 的中点.

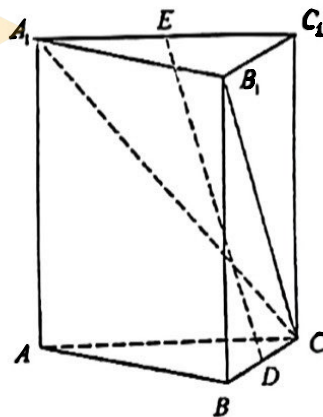
(I)求证: $DE //$ 平面 ABB_1A_1 ;

(II) $AB = 2, AA_1 = 3$, 再从条件①, 条件②, 条件③中选择一个作为已知, 使三棱柱唯一确定, 求 DE 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值.

条件①: $DE = 4$

条件②: $A_1C = B_1C$

条件③: $BB_1 \perp AC$



注: 如果选择的条件不符合要求, 第(II)问得0分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

甲、乙两名同学积极参与体育锻炼, 对同一体育项目, 在一段时间内甲进行了6次测试, 乙进行了7次测试. 每次测试满分均为100分, 达到85分及以上为优秀, 两位同学的测试成绩如下表:

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	平均分
甲	82	80	82	86	93	93		86
乙	76	81	80	85	89	96	95	86

(I)从甲、乙两名同学共进行的13次测试中随机选取一次, 求该次测试成绩超过90分的概率;

(II)从甲同学进行的6次测试中随机选取4次, 设 X 表示这4次测试成绩达到优秀的次数, 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$;

(III)记样本中甲进行的六次测试成绩的方差为 S_1^2 , 样本中乙进行的七次测试成绩的方差为 S_2^2 , 样本中甲、乙两名同学共进行的13次测试成绩的方差为 S_3^2 , 写出 S_1^2, S_2^2, S_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^{ax} + b$ ，曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为

$$y = -3x - 3.$$

(I) 求 a, b 的值:

(II) ① 求证: $f(x)$ 只有一个零点:

② 记 $f(x)$ 的零点为 x_0 ，曲线 $y = f(x)$ 在 $(u, f(u))$ 处的切线 l 与 x 轴的交点横坐标为

x_1 ，若 $x_1 \geq x_0$ ，求 u 的取值范围.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， E 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 4.

(I) 求椭圆 E 的标准方程:

(II) 对于给定的点 $P(0, t)$ ，在 E 上存在不同的三点 A, B, Q ，使得四边形 $APBQ$ 为平行四边形，且直线 AB 过点 $(0, 1)$ ，求 t 的取值范围.

(21)(本小题 15 分)

由 m 个正整数构成的有限集 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ (其中 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_m$)，记 $P(M) = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ，特别规定 $P(\emptyset) = 0$ ，若集合 M 满足: 对任意的正整数 $k \leq P(M)$ ，都存在集合 M 的两个子集 A, B ，使得 $k = P(A) - P(B)$ 成立，则称集合 M 为“满集”.

(I) 分别判断集合 $M_1 = \{1, 2\}$ 与 $M_2 = \{2, 3\}$ 是否为“满集”，请说明理由:

(II) 若集合 M 为“满集”，求 a_1 的值:

(III) 若 M 为满集， $P(M) = 2024$ ，求 m 的最小值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

