天一大联考

2023—2024 学年(上)高一年级期中考试

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的定义.

解析　由题可知 $m=2m-2$,解得 $m=2$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查函数的定义域.

解析　由题可知 $x-2\geqslant 0$ 且 $x^2-1\neq 0$,解得 $x\geqslant 2$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查全称量词命题的否定及命题的真假.

解析　由题可知命题“$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+2a-1\leqslant 0$”为真命题,则 $\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2\leqslant 1-2a$,故 $1-2a\geqslant 0$,$a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查函数的图象与性质.

解析　当 $a>1$ 时,$f(0)=1-a<0$,再结合指数函数 $y=a^x(a>1)$的图象特征可知 $f(x)$的图象经过第一、三、四象限,所以充分性成立;若 $f(x)$的图象经过第三象限,易知 $0<a<1$ 时不成立,所以 $a>1$,且 $f(0)=1-a<0$,解得 $a>1$,所以必要性成立.

5. 答案　B

命题意图　本题考查函数的图象.

解析　当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x}-x$,为减函数,当 $x<0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{-x}-x\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)}=2$,当且仅当 $x=-1$ 时,$f(x)$取得最小值 2. 故 B 选项的图象符合题意.

6. 答案　A

命题意图　本题考查函数的对称性和单调性.

解析　因为 $f(x+5)=f(-x+5)$,所以 $f(8)=f(3+5)=f(-3+5)=f(2)$. 因为 $f(x)$在区间$(0,5)$上单调递减,所以 $f(2)>f(3)>f(4)$,即 $f(8)>f(3)>f(4)$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查函数的奇偶性和单调性.

解析　由题可知$\dfrac{x^2+ax-3}{x}=-\dfrac{x^2-ax-3}{-x}$,则 $2ax=0$,$a=0$,所以 $f(x)=x-\dfrac{3}{x}$. 因为 $f(x)$在区间$[m-1,m]$上单调递增,所以 $f(m)=m-\dfrac{3}{m}=2$,解得 $m=3$ 或 -1.

8. 答案　C

命题意图　本题考查幂函数的定义及函数的奇偶性.

解析　因为$f(x)$是三次函数且是幂函数,所以$f(x)=x^3$,所以$g(x)=\dfrac{x^3+2^{|x|+1}}{2^{|x|}}=\dfrac{x^3}{2^{|x|}}+2$. 令$h(x)=g(x)-2=\dfrac{x^3}{2^{|x|}}$,则$h(x)$是奇函数,所以$g(-2\,023)+g(-2\,022)+g(-2\,021)+\cdots+g(0)+\cdots+g(2\,021)+g(2\,022)+g(2\,023)=h(-2\,023)+h(-2\,022)+h(-2\,021)+\cdots+h(0)+\cdots+h(2\,021)+h(2\,022)+h(2\,023)+4\,047\times2=[h(-2\,023)+h(2\,023)]+[h(-2\,022)+h(2\,022)]+[h(-2\,021)+h(2\,021)]+\cdots+[h(-1)+h(1)]+h(0)+8\,094=8\,094$.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案**　BD

命题意图　本题考查不等式的性质.

解析　由$a+2b>c+b$可知$a+b-c>0$,与已知矛盾,所以A错误;由题可知$b=c-a<0$,则$ab<bc$,所以B正确;$a+b>a-b$等价于$b>0$,与$b<0$矛盾,所以C错误;$a-2b>c-b$等价于$a-c-b>0$,因为$a>c$,所以$a-c>0$,又$-b>0$,所以$a-c-b>0$,所以D正确.

10. **答案**　ACD

命题意图　本题考查指数函数的定义及分段函数求值.

解析　由题可知$a-1=1$,解得$a=2$,则$f(x)$是增函数,所以A正确;$g(x)=\begin{cases}2^x,x\leqslant0,\\4x-4,x>0,\end{cases}$当$x=0$时,$2^x=2^0=1$,$4x-4=-4$,$1>-4$,所以$g(x)$不是增函数,所以B错误;$g(-2)=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$,$g\left(\dfrac{1}{4}\right)=4\times\dfrac{1}{4}-4=-3$,所以C正确;由题易知只需考虑$x>0$的情况,将$x=1$代入可得不等式$f(x)>g(x)$成立,所以最小整数是1.

11. **答案**　BC

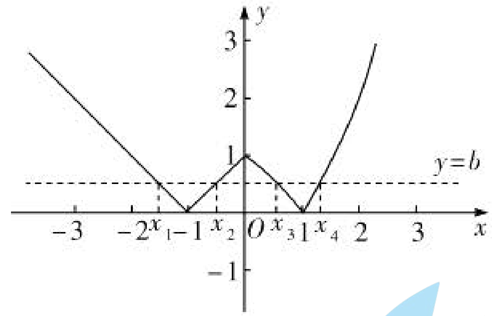
命题意图　本题考查抽象函数的性质.

解析　令$x=y=1$,得$f(1)=f(1)+f(1)$,即$f(1)=0$,$f(x)=x^3$不满足,所以A错误;令$x=-1,y=-1$,得$f(1)=-f(-1)-f(-1)$,即$f(-1)=0$,令$x=-2,y=\dfrac{1}{2}$,得$f(-1)=\dfrac{1}{8}f(-2)-8f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,得$f(-2)=8$,所以B正确;令$y=-1$,得$f(-x)=-f(x)+x^3f(-1)=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,所以C正确;由$f(-1)=0$,$f(1)=0$,可知D错误.

12. **答案**　ACD

命题意图　本题考查函数的图象和性质.

解析　画出函数$f(x)=\begin{cases}|x+1|,x\leqslant0,\\|2^x-2|,x>0\end{cases}$的大致图象,如图所示,由图可知$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$和$(0,1)$上单调递减,所以A正确;由图可知,当$a=1$时,直线$y=a$与$f(x)$的图象有3个不同的公共点,当$a>1$时,直线$y=a$与$f(x)$的图象有2个不同的公共点,所以B错误;令$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=b(0<b<1)$,可得直线$y=b$与$f(x)$的图象有4个不同的交点,且交点横坐标分别为$x_1,x_2,x_3,x_4$,由图可知$x_1+x_2=-2$,$2-2^{x_3}=2^{x_4}-2$,即$2^{x_3}+2^{x_4}=4\geqslant2\sqrt{2^{x_3}\cdot2^{x_4}}=2\sqrt{2^{x_3+x_4}}$,所以$x_3+x_4\leqslant2$,因为$x_3<x_4$,所以$x_3+x_4<2$,所以C,D正确.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案　(1,4)

命题意图　本题考查指数函数的定义.

解析　当 $x=1$ 时,$f(x)=b^0+3=4$,故 $f(x)$ 的图象恒过点(1,4).

14. 答案　$\frac{1}{27}$

命题意图　本题考查幂函数的性质.

解析　设 $f(x)=x^\alpha$,则 $\frac{f(4)}{f(2)}=\frac{4^\alpha}{2^\alpha}=2^\alpha=3$,所以 $f\left(\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha=\frac{1}{(2^\alpha)^3}=\frac{1}{27}$.

15. 答案　2 700

命题意图　本题考查函数模型的应用.

解析　由题可知 $8\ 100=k\cdot 9^2$,解得 $k=100$. 当 $v\geqslant 1.5$ 时,$m\geqslant 100\cdot 9^{1.5}=2\ 700$.

16. 答案　9

命题意图　本题考查基本不等式的应用.

解析　由题可知 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x+2=0$ 的实数根,且 $k>0$,则 $\begin{cases}a+b=\frac{2}{k},\\ ab=\frac{2}{k},\end{cases}$ 所以 $a+b=ab$,且 $a>0,b>0$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $4a+b=(4a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$,当且仅当 $b=2a$,即 $a=\frac{3}{2},b=3$ 时取等号.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查指数的运算.

解析　(Ⅰ)$5^{\frac{3m-2n}{2}}=\sqrt{(5^m)^3}\cdot\frac{1}{5^n}=\sqrt{2^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)$4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right)\times\frac{1}{6}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$

$=4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)\times\frac{1}{6}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$ ………………………………………………(7 分)

$=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{6}a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$

$=-a^{\frac{2}{3}}$. ………………………………………………(10 分)

18. **命题意图** 本题考查函数单调性的定义及不等式的求解.

解析 （Ⅰ）设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$ 且 $x_1>x_2$， …………………………（1分）

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1-\frac{2}{x_1}\right)-\left(x_2-\frac{2}{x_2}\right)$

$=x_1-x_2+\frac{2}{x_2}-\frac{2}{x_1}$

$=(x_1-x_2)+\frac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)\left(1+\frac{2}{x_1x_2}\right)>0.$ …………………………（4分）

所以 $f(x)$ 是增函数. …………………………（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)$ 是增函数，$f(1)=-1$， …………………………（8分）

所以不等式 $f\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right)\geqslant-1$ 即 $2^x-\frac{2}{2^x}\geqslant1$， …………………………（9分）

变形得 $(2^x)^2-2^x-2\geqslant0$， …………………………（10分）

即 $(2^x-2)(2^x+1)\geqslant0$， …………………………（11分）

解得 $x\geqslant1$，即不等式的解集为 $[1,+\infty)$. …………………………（12分）

19. **命题意图** 本题考查一元二次不等式的解法及集合的关系.

解析 （Ⅰ）将不等式 $2x^2+(m-2)x-m<0$ 变形，

可得 $(x-1)(2x+m)<0$. …………………………（2分）

因为 $m>-2$，所以 $-\frac{m}{2}<1$. …………………………（4分）

所以不等式 $2x^2+(m-2)x-m<0$ 的解集 $A=\left(-\frac{m}{2},1\right)$. …………………………（6分）

（Ⅱ）由题可知 $B\subseteq A$. …………………………（8分）

所以 $\begin{cases}m^2+2m<m+2,\\ m^2+2m\geqslant-\frac{m}{2},\\ m+2\leqslant1,\end{cases}$ …………………………（10分）

结合 $m>-2$，得 $m\in\varnothing$.

故 m 的取值范围为 $\varnothing$（满足条件的 m 不存在）. …………………………（12分）

20. **命题意图** 本题考查函数模型.

解析 （Ⅰ）由题可知 $\begin{cases}a+\frac{b}{2}=13,\\ a+\frac{b}{3}=12,\end{cases}$ …………………………（1分）

解得 $\begin{cases}a=10,\\ b=6,\end{cases}$ …………………………（3分）

所以 $N(x)=10+\frac{6}{x}(1\leqslant x\leqslant30,x\in\mathbf{N}^*)$. …………………………（4分）

（Ⅱ）由题可得每件该产品的销售利润为 $P(x)=\begin{cases}x+60,1\leqslant x\leqslant 20,\\-x+100,20<x\leqslant 30,\end{cases}$ ……（5分）

所以第 x 天的日销售利润 $f(x)=N(x)\cdot P(x)=\begin{cases}\left(10+\dfrac{6}{x}\right)(x+60),1\leqslant x\leqslant 20,\\\left(10+\dfrac{6}{x}\right)(-x+100),20<x\leqslant 30,\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}10x+\dfrac{360}{x}+606,1\leqslant x\leqslant 20,\\-10x+\dfrac{600}{x}+994,20<x\leqslant 30.\end{cases}$ ……（7分）

当 $1\leqslant x\leqslant 20$ 时，$f(x)=10x+\dfrac{360}{x}+606\geqslant 2\sqrt{10x\cdot\dfrac{360}{x}}+606=726$，

当且仅当 $10x=\dfrac{360}{x}$，即 $x=6$ 时等号成立，……（9分）

当 $20<x\leqslant 30$ 时，$f(x)=-10x+\dfrac{600}{x}+994$ 为减函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(30)=714<726$. ……（11分）

故当 $x=30$ 时，$f(x)$ 取得最小值714，即开幕式后的第30天的日销售利润最小. ……（12分）

21. **命题意图**　本题考查函数的性质及不等式的求解.

解析　（Ⅰ）因为 $f(x)$，$g(x)$ 分别是偶函数和奇函数，

$f(x)+g(x)=x^2-x-1$①，

所以 $f(-x)+g(-x)=x^2+x-1$，即 $f(x)-g(x)=x^2+x-1$②. ……（1分）

①－②可得 $2g(x)=-2x$，即 $g(x)=-x$， ……（3分）

①＋②可得 $2f(x)=2x^2-2$，即 $f(x)=x^2-1$.

所以 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=-x$. ……（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $h(x)=x^2-2ax+3a-2$，图象开口向上，对称轴为 $x=a$，$f(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上的值域为 $[0,1]$.

……（6分）

由题可知，$f(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上的最小值大于等于 $h(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值，$f(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上的最大值小于等于 $h(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值. ……（7分）

当 $0<a<1$ 时，$h(x)$ 在区间 $[-1,a]$ 上单调递减，在区间 $[a,1]$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(a)=-a^2+3a-2$，$h(x)_{\max}=h(-1)=5a-1$.

所以 $\begin{cases}-a^2+3a-2\leqslant 0,\\5a-1\geqslant 1,\end{cases}$ 得 $\dfrac{2}{5}\leqslant a<1$. ……（9分）

当 $a\geqslant 1$ 时，$h(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=a-1$，$h(x)_{\max}=h(-1)=5a-1$.

所以 $\begin{cases}a-1\leqslant 0,\\5a-1\geqslant 1,\end{cases}$ 得 $a=1$. ……（11分）

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{5},1\right]$. ………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查指数函数的性质及不等式求解.

解析 （Ⅰ）函数 $y=a^{x-1}+2$ 的图象向下平移 2 个单位长度后得到 $y=a^{x-1}$ 的图象，再向左平移 1 个单位长度得到 $y=a^{x}$ 的图象，

所以 $f(x)=a^{x}$. ………………………………………………（2 分）

又 $f(2)=a^{2}=16$，

所以 $a=4$（负值舍去）. ………………………………………………（3 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $g(x)=\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$. ………………………………………………（4 分）

所以 $g(x)+g(1-x)=\frac{4^{x}}{4^{x}+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^{x}}{4^{x}+2}+\frac{\frac{4}{4^{x}}}{\frac{4}{4^{x}}+2}=\frac{4^{x}}{4^{x}+2}+\frac{4}{4+2\times4^{x}}=\frac{4^{x}+2}{4^{x}+2}=1$. ……………（7 分）

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 $y_1=|4^{x}+m|$，$y_2=|4^{-x}+m|$. ………………………………………………（8 分）

若两函数在区间[1,2]上都是增函数，

则 $\begin{cases}4^{x}+m\geqslant0,\\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x}+m\leqslant0\end{cases}$ 在区间[1,2]上恒成立，

可得 $\begin{cases}4+m\geqslant0,\\ \frac{1}{4}+m\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant m\leqslant-\frac{1}{4}$. ………………………………………………（10 分）

若两函数在区间[1,2]上都是减函数，

则 $\begin{cases}4^{x}+m\leqslant0,\\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x}+m\geqslant0\end{cases}$ 在区间[1,2]上恒成立，

可得 $\begin{cases}16+m\leqslant0,\\ \frac{1}{16}+m\geqslant0,\end{cases}$ 该不等式组无解. ………………………………………………（11 分）

综上，实数 m 的取值范围是 $\left[-4,-\frac{1}{4}\right]$. ………………………………………………（12 分）