

2020 年全国高中数学联赛江苏赛区

市级选拔赛试卷

题号	一	二				总成绩
		11	12	13	14	
得分						
评卷人						
复核人						

- 考生注意：**
1. 本试卷共两大题（14 小题），全卷满分 150 分。考试时间：120 分钟。
 2. 用钢笔、签字笔或圆珠笔作答。
 3. 解题书写不要超出装订线。
 4. 不能使用计算器。

得分	评卷人

一、填空题（本题共 10 小题，满分 70 分，每小题 7 分。要求直接将答案写在横线上。）

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ ， $B = \{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ ，若集合 C 满足 $C \cap A = C$ 且 $C \cap B \neq \emptyset$ ，则集合 C 的个数是_____。
2. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$ ， $g(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$ ，则不等式 $f(x) \leq 2g(x)$ 的解集为_____。
3. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 3\overline{CA} \cdot \overline{AB}$ ，则 $\triangle ABC$ 的最大角的正弦值为_____。
4. 函数 $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^4+3x^2+1}$ 的最小值是_____。
5. 已知集合 $A = \{-2, 0, 2\}$ ，在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $P = \{(x, y) | x \in A, y \in A\}$ ，从

集合 P 中任取三个点，这三个点能构成等腰直角三角形的概率是_____。

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯 (ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $\triangle ABC$ 的内切圆与边 AB 相切于点 D , 且 $AD=3DB$, 则 $\angle CAB$ 的取值范围是_____.

7. 已知 z 为复数, 若 $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数, 则 $|z^2 - z + 2|$ 的最小值为_____.

8. 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 DC 的中点, F 在线段 D_1C_1 上运动, 则三棱锥 $F - ADE$ 的外接球表面积的最小值为_____.

9. 已知正整数 m, n 均为质数, 且 $7m+n$ 和 $mn+11$ 也都是质数, 则 $m^n + n^m$ 的值为_____.

10. 平面区域 $S = \{(x, y) | x, y \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos^2 x + \sin x \sin y + \cos^2 y \geq \frac{5}{4}\}$ 的面积是_____.

二、解答题 (本大题共 4 小题, 每小题 20 分, 共 80 分)

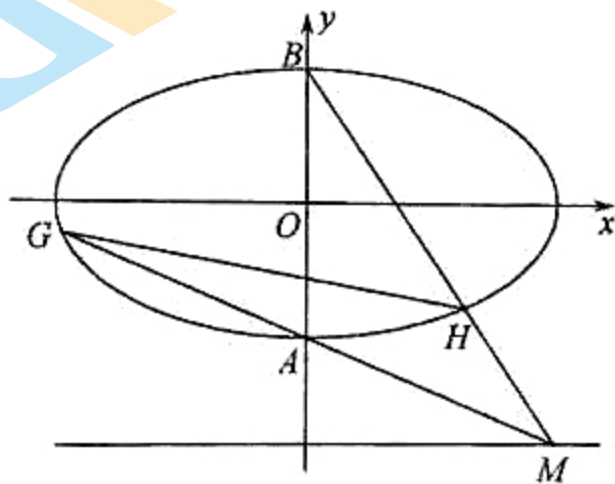
得分	评卷人

11. 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的下顶点为 A , 上顶点为 B ,

点 $M(m, -2)$ ($m \neq 0$) 在直线 $y = -2$ 上, 直线 MA, MB

分别与椭圆 C 交于两点 G, H , 记 $\triangle MAB$ 的面积为 S_1 , $\triangle MGH$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的

最大值及相应的 m 的值.



(第 11 题图)

得分	评卷人

12. 已知递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n - na_n = n$.

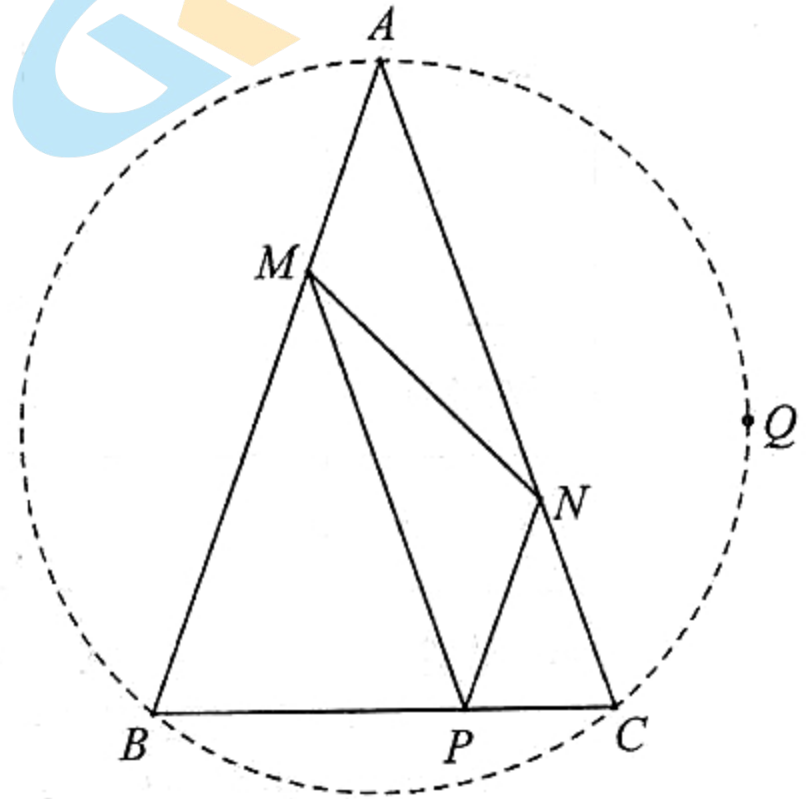
(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_n = \frac{S_{n+1}}{n}$, 求证: 存在唯一的正整数 n , 使得 $a_{n+1} \leq b_n < a_{n+2}$.

得分	评卷人

13. 如图, 过等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上一点 P 作 $PM \parallel CA$ 交 AB 于点 M , 作 $PN \parallel BA$ 交 AC 于点 N , 设点 P 关于直线 MN

的对称点为 Q . 求证: 点 Q 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.



(第 13 题图)

得分	评卷人

14. 在 $\triangle ABC$ 的内部有 2020 个点, 将顶点 A, B, C 和这 2020 个点用线段连结, 使这些线段除端点外没有其它公共点, 可以

把 $\triangle ABC$ 分割成多少个没有重叠部分的小三角形?

2020 年全国高中数学联赛江苏赛区

市级选拔赛参考答案与评分细则

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 7 分，共 70 分。要求直接将答案写在横线上。）

1. $2^{2020} - 2^{20}$ 2. $\{0, 2\}$ 3. $\frac{3}{10}\sqrt{10}$ 4. $-\frac{2}{5}$ 5. $\frac{1}{3}$
 6. $(0, \frac{\pi}{3})$ 7. $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 8. $\frac{545}{256}\pi a^2$ 9. 17 10. $\frac{\pi^2}{6}$

二、解答题（本大题共 4 小题，每小题 20 分，共 80 分）

11. 解：因为 $A(0, -1)$, $B(0, 1)$, 直线 MA 的方程为 $y = -\frac{1}{m}x - 1$, 直线 MB 的方程为

$$y = -\frac{3}{m}x + 1, \text{ 由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{m}x - 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } x_G = -\frac{8m}{m^2 + 4},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{3}{m}x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } x_H = \frac{24m}{m^2 + 36}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } S_1 = \frac{1}{2} |MA| |MB| \sin \angle AMB, \quad S_2 = \frac{1}{2} |MG| |MH| \sin \angle GMH, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{|MA| |MB|}{|MG| |MH|} = \frac{|m|}{|m - x_G|} \cdot \frac{|m|}{|m - x_H|} = \frac{m^2}{|m + \frac{8m}{m^2 + 4}| |m - \frac{24m}{m^2 + 36}|}$$

$$= \frac{(m^2 + 4)(m^2 + 36)}{(m^2 + 12)^2} = \frac{m^4 + 40m^2 + 144}{m^4 + 24m^2 + 144} = 1 + \frac{16m^2}{m^4 + 24m^2 + 144} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$= 1 + \frac{16}{m^2 + \frac{144}{m^2} + 24} \leq 1 + \frac{16}{2\sqrt{144} + 24} = \frac{4}{3},$$

当且仅当 $m^2 = \frac{144}{m^2}$, 即 $m^2 = 12$, $m = \pm 2\sqrt{3}$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$. $\dots\dots\dots 20 \text{ 分}$

12. 证明：(1) 因为 $2S_n - na_n = n$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} - (n-1)a_{n-1} = n-1$,

两式相减得 $2a_n - na_n + (n-1)a_{n-1} = 1$,

即 $(n-2)a_n + 1 = (n-1)a_{n-1}$, 又 $(n-1)a_{n+1} + 1 = na_n$,

两式相减得 $(n-1)a_{n+1} - (n-2)a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} = 2(n-1)a_n$,

所以 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 5分

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 0$),

在 $2S_n - na_n = n$ 中, 令 $n=1$, 得 $a_1 = 1$,

则 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $b_n = \frac{S_{n+1}}{n} = \frac{n+1 + \frac{(n+1)n}{2}d}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}d$ 10分

若 $a_{n+1} \leq b_n < a_{n+2}$, 则 $1 + nd \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}d < 1 + (n+1)d$,

即 $\begin{cases} n^2 - n - \frac{2}{d} \leq 0, \\ n^2 + n - \frac{2}{d} > 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} < n \leq \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2}$, 15分

因为 $d > 0$, 所以 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} > 0$,

又 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2} - \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} = 1$, 所以存在唯一的正整数 n ,

使 $n \in (\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2}, \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2}]$, 即 $a_{n+1} \leq b_n < a_{n+2}$ 20分

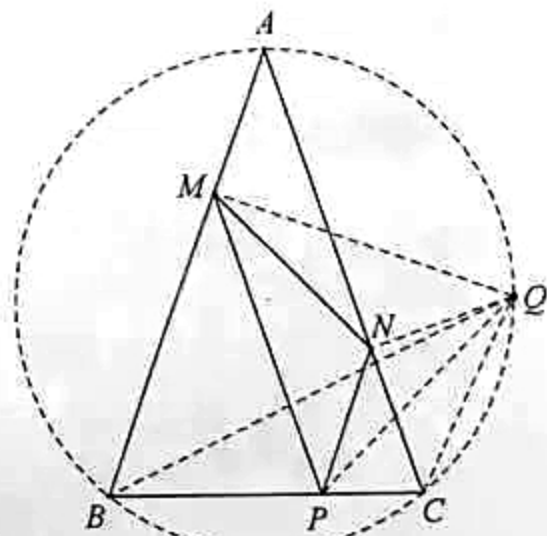
13. 证明: 连结 QM, QN, QB, QC, QP ,

因为 $PM \parallel CA$, 所以 $\angle BPM = \angle C$,

又因为 $\angle B = \angle C$, 所以 $\angle BPM = \angle B$,

所以 $MB = MP$, 即 $\triangle MBP$ 是等腰三角形,

又因为点 P, Q 关于直线 MN 对称,



所以 $MB = MP = MQ$.

同理 $NP = NQ = NC$,

即点 M 是 $\triangle BPQ$ 的外心, 点 N 是 $\triangle CPQ$ 的外心. 10 分

$$\text{所以 } \angle BQP = \frac{1}{2} \angle BMP = \frac{1}{2} \angle BAC ,$$

$$\angle PQC = \frac{1}{2} \angle PNC = \frac{1}{2} \angle BAC , \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

所以 $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle BAC$,

所以 Q, A, B, C 四点共圆, 即 Q 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 20 分

14. 解: 考虑一般情况, 设 $\triangle ABC$ 的内部有 n 个点, 把 $\triangle ABC$ 分割成 a_n 个没有重叠部分的

小三角形, 考察新增加的一个点 P_{n+1} ;

(1) 若 P_{n+1} 在某个小三角形的内部, 如图 1 所示, 那么原小三角形的三个顶点和点 P_{n+1}

连结, 这些线段把这个小三角形一分为三, 即增加了两个小三角形; 5 分

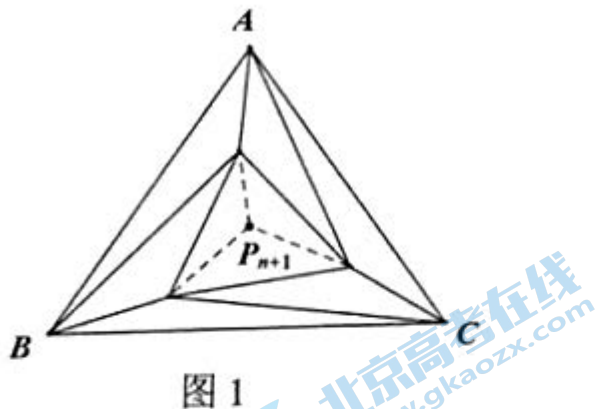


图 1

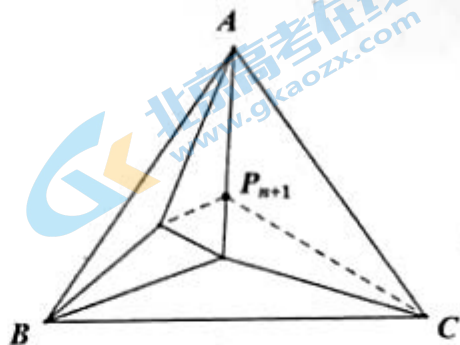


图 2

(2) 若 P_{n+1} 在某两个小三角形的公共边上, 如图 2 所示, 那么这两个小三角形的顶点和点 P_{n+1} 连结, 把这两个小三角形一分为二, 即也增加了两个小三角形. 10 分

综上, $\triangle ABC$ 内部的 $n+1$ 个点把 $\triangle ABC$ 分割成的小三角形的个数 $a_{n+1} = a_n + 2$, 即 $\{a_n\}$ 是等差数列, 又易知 $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, 所以 $a_n = 2n + 1$ 15 分

所以, 当 $n = 2020$ 时, $a_{2020} = 4041$, 即可以把 $\triangle ABC$ 分割成 4041 个没有重叠部分的小三角形. 20 分

(注: 直接猜出 $a_n = 2n + 1$, 进而得到正确答案是 4041, 给 5 分)
 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。