

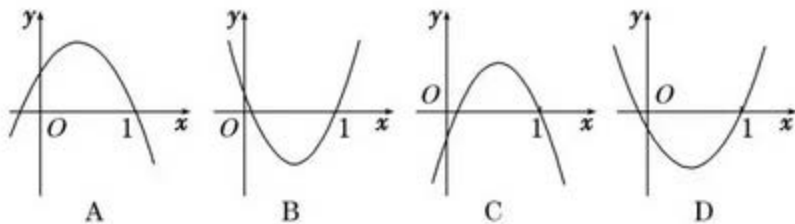
中央民大附中 2019—2020 学年第一学期

9 月考试试题卷

年级 高三 科目 数学 时量 120 分钟 总分 150 分

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 函数  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$  的定义域为 ( )
- A.  $[0, +\infty)$     B.  $(1, +\infty)$     C.  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$     D.  $[0, 1)$
2. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $(-3, 4)$ ，则  $\cos \alpha =$  ( )
- A.  $\frac{3}{5}$     B.  $-\frac{3}{5}$     C.  $\frac{4}{5}$     D.  $-\frac{4}{5}$
3. 下列函数中，既是偶函数又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是 ( )
- A.  $y = x^2 + 2x$     B.  $y = x^3$     C.  $y = \ln x$     D.  $y = x^2$
4. 已知函数  $y = ax^2 + bx + c$ ，如果  $a > b > c$ ，且  $a + b + c = 0$ ，则它的图象是 ( )



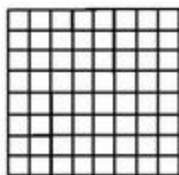
5.  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  是  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  的 ( )
- A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
6. 函数  $f(x) = e^x + x - 2$  的零点所在的一个区间是 ( )
- A.  $(-2, -1)$     B.  $(-1, 0)$     C.  $(0, 1)$     D.  $(1, 2)$
7. 已知函数  $f(x)$  的图象向左平移 1 个单位后关于  $y$  轴对称，当  $x_2 > x_1 > 1$  时， $[f(x_2) - f(x_1)] \cdot [x_2 - x_1] < 0$  恒成立，设  $a = f(-\frac{1}{2})$ ,  $b = f(2)$ ,  $c = f(3)$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )
- A.  $c > a > b$     B.  $c > b > a$     C.  $a > c > b$     D.  $b > a > c$

8. 一个国际象棋棋盘（由 $8 \times 8$ 个方格组成），其中有一个小方格因破损而被剪去（破损位置不确定），“L”形骨牌由三个相邻的小方格组成，如图所示。现要将这个破损的棋盘剪成数个“L”形骨牌，则（ ）

- A. 至多能剪成 19 块“L”形骨牌
- B. 至多能剪成 20 块“L”形骨牌
- C. 一定能剪成 21 块“L”形骨牌
- D. 前三个答案都不对



“L”形骨牌



国际象棋棋盘

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中横线上.

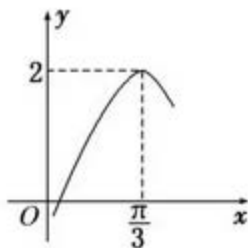
9. 已知向量  $a = (1, -2)$ ,  $b = (2, m)$ , 若  $a \perp b$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

10. 已知函数  $f(x) = \log_3(x+a)$  的图象过点  $(2, 1)$ , 那么  $a =$  \_\_\_\_\_.

11.  $\sin 225^\circ =$  \_\_\_\_\_.

12. 能够说明“设  $a, b$  是任意非零实数. 若  $\frac{b}{a} > 1$ , 则  $b > a$ ”是假命题的一组整数  $a, b$  的值依次为 \_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x) = A \sin(2x + \varphi)$  ( $A > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ ) 的部分图象如图所示, 那么  $f(0) =$  \_\_\_\_\_.



(13 题图)

14. 已知函数  $f(x)$  定义域为  $\mathbb{R}$ , 设  $F_f(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq 1, \\ 1, & |f(x)| > 1. \end{cases}$

①若  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , 则  $F_f(1) =$  \_\_\_\_\_;

②若  $f(x) = e^{a|x|} - 1$ , 且对任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_f(x) = f(x)$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题满分 13 分)

设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 2]$  的最大值和最小值.

16. (本小题满分 13 分)

已知集合  $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , 集合  $B = \{1, 2\}$ , 且  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围。

17. (本小题满分 13 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2\sqrt{3}$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ .

(I) 求  $c$  的值;

(II) 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos 2x$ .

(I) 求  $f(\frac{\pi}{6})$  的值;

(II) 求证: 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x) \geq -1$ .

19. (本小题满分14分)

已知函数  $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x - 2 \quad (x > 0)$

(I) 若曲线  $y=f(x)$  在点  $R(1, f(1))$  处的切线与直线  $y=x+2$  垂直, 求函数  $y=f(x)$  的单调区间;

(II) 若对于  $\forall x \in (0, +\infty)$  都有  $f(x) > 2(a-1)$  成立, 试求  $a$  的取值范围;

(III) 记  $f(x) = 2(a-1)$  当  $a=1$  时, 函数  $g(x)$  在区间  $[e^{-1}, e]$  上有两个零点, 求实数  $b$  的取值范围.

20. (本小题满分14分)

若  $A_1, A_2, \dots, A_m$  为集合  $A = \{1, 2, \dots, n\} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$  的子集, 且满足两个条件:

①  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = A$ ;

② 对任意的  $\{x, y\} \subseteq A$ , 至少存在一个  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ , 使  $A_i \cap \{x, y\} = \{x\}$  或  $\{y\}$ .

则称集合组  $A_1, A_2, \dots, A_m$  具有性质  $P$ .

如图, 作  $n$  行  $m$  列数表, 定义数表中的第  $k$  行第  $l$  列的数为

$$a_{kl} = \begin{cases} 1 & (k \in A_l) \\ 0 & (k \notin A_l) \end{cases}$$

$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1m}$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nm}$

(I) 当  $n=4$  时, 判断下列两个集合组是否具有性质  $P$ , 如果是请画出所对应的表格, 如果不是请说明理由:

集合组 1:  $A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{4\}$ ;

集合组 2:  $A_1 = \{2, 3, 4\}, A_2 = \{2, 3\}, A_3 = \{1, 4\}$ .

(II) 当  $n=7$  时, 若集合组  $A_1, A_2, A_3$  具有性质  $P$ , 请先画出所对应的 7 行 3 列的一个数表, 再依此表格分别写出集合  $A_1, A_2, A_3$ ;

(III) 当  $n=100$  时, 集合组  $A_1, A_2, \dots, A_t$  是具有性质  $P$  且所含集合个数最小的集合组, 求  $t$  的值及  $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_t|$  的最小值. (其中  $|A_i|$  表示集合  $A_i$  所含元素的个数)