工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至3页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|\leqslant 2\}$,$B=\{2,4\}$,则 $A\cup B=$

(A) $\{0,2\}$　　(B) $\{-2,-1,0,1,2,4\}$

(C) $\{0,1,2,4\}$　　(D) $\{1,2,4\}$

2. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x-1\leqslant 0$"的否定是

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1\leqslant 0$　　(B) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1>0$

(C) $\forall x\in\mathbf{R},x^2+x-1>0$　　(D) $\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2+x_0-1\geqslant 0$

3. 已知双曲线 C 经过点 $(4,2)$,且与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 具有相同的渐近线,则双曲线 C 的标准方程为

(A) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$　　(B) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

(C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　(D) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{12}=1$

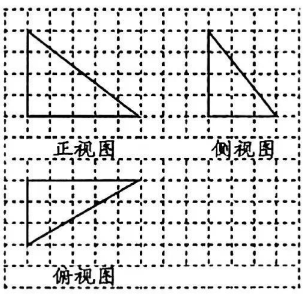
4. 如图是某三棱锥的三视图,已知网格纸的小正方形边长是1,则这个三棱锥中最长棱的长为

(A) 5

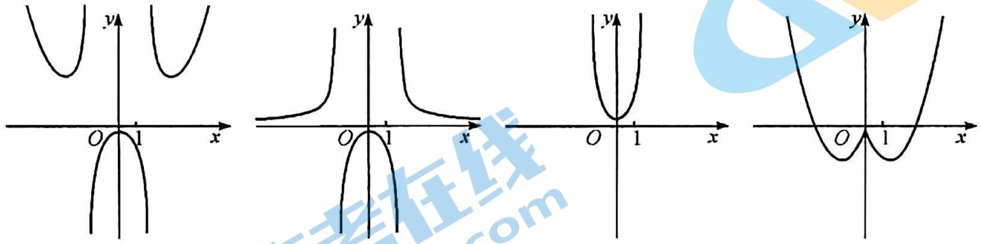
(B) $\sqrt{34}$

(C) $\sqrt{41}$

(D) 7



5. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{|x|}}{x^2-3}$ 的图象大致为



(A) (B) (C) (D)

6. 一次数学考试后，某班级平均分为 110 分，方差为 s_1^2. 现发现有两名同学的成绩计算有误，甲同学成绩被误判为 113 分，实际得分为 118 分；乙同学成绩误判为 120 分，实际得分为 115 分. 更正后重新计算，得到方差为 s_2^2，则 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系为

(A) $s_1^2=s_2^2$　(B) $s_1^2>s_2^2$　(C) $s_1^2<s_2^2$　(D)不能确定

7. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$. 给出定义：经过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B，分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1,B_1，则称向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

(A) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　(B) $(1,\frac{\sqrt{3}}{3})$　(C) $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　(D) $(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$

8. 世界大学生运动会(简称大运会)由国际大学生体育联合会主办，每两年举办一届，是规模仅次于奥运会的世界综合性运动会，第 31 届大运会将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都召开. 为办好本届大运会，组委会精心招募了一批志愿者，现准备将甲、乙等 6 名志愿者安排进“东安湖体育公园”，“凤凰山体育公园”，“四川省体育馆”工作，每个地方安排两人且每人只能在一个场馆工作. 若每位志愿者被分到各个场馆的可能性相同，则甲，乙两人被安排在在同一个场馆的概率为

(A) $\frac{1}{15}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{1}{3}$

9. 设 S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{2023}=2023$，则 $\frac{1}{a_4}+\frac{4}{a_{2020}}$ 的最小值为

(A) $\frac{5}{2}$　(B) 5　(C) 9　(D) $\frac{9}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，当 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$ 时，$|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. 若将函数 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，然后再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则不等式 $g(x)\geq\frac{1}{2}$ 的解集为

(A) $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$　(B) $[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

(C) $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$　(D) $[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线 $y=kx$ $(k\neq 0)$ 与椭圆 C 相交于 A，B 两点. 有下列结论：①四边形 AF_1BF_2 为平行四边形；②若 $AE\perp x$ 轴，垂足为 E，则直线 BE 的斜率为 $\frac{1}{2}k$；③若 $|OA|=c$（O 为坐标原点），则四边形 AF_1BF_2 的面积为 b^2；④若 $|AF_1|=2|AF_2|$，则椭圆的离心率可以是 $\frac{2}{3}$.

其中错误结论的个数是

(A)1　　(B) 2　　(C)3　　(D)0

12. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，其中 $m\in\mathbf{R}$，则 $mx_1x_2x_3$ 的取值范围是

(A)$(1,+\infty)$　　(B) $(2,+\infty)$　　(C)$(e,+\infty)$　　(D)$(3,+\infty)$

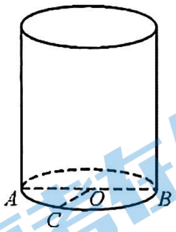
第Ⅱ卷　（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知复数 $z=(a+i)(2+i)$ 是纯虚数（i 为虚数单位），则实数 a 的值为______.

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=3$，$a_6=27$，则 a_8 的值为______.

15. 如图，AB 为圆柱下底面圆 O 的直径，C 是下底面圆周上一点，已知 $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，$OA=2$，圆柱的高为 5. 若点 D 在圆柱表面上运动，且满足 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则点 D 的轨迹所围成图形的面积为______.



16. 在平面直角坐标系 xOy 中，射线 OT 与直线 $l:x=9$，圆 $O:x^2+y^2=9$ 分别相交于 A，B 两点，若线段 OB 上存在点 $M(m,n)$（不含端点），使得对于圆 O 上任意一点 P 都满足 $\frac{|PM|}{|PA|}=\frac{|BM|}{|BA|}$，则 mn 的最大值为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

某旅游公司针对旅游复苏设计了一款文创产品来提高收益. 该公司统计了今年以来这款文创产品定价 x（单位：元）与销量 y（单位：万件）的数据如下表所示：

产品定价 x（单位：元）	9	9.5	10	10.5	11
销量 y（单位：万件）	11	10	8	6	5

（Ⅰ）依据表中给出的数据，判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请计算相关系数并加以说明（计算结果精确到 0.01）；

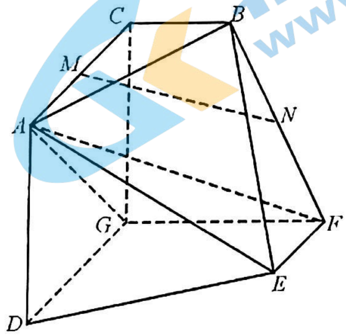
（Ⅱ）建立 y 关于 x 的回归方程，预测当产品定价为 8.5 元时，销量可达到多少万件.

参考公式：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sqrt{65}\approx 8.06$.

18.(本小题满分 12 分)

如图,在多面体 $ABCDEFG$ 中,已知 $ADGC$ 是正方形,$GD /\!/ EF$,$GF /\!/ BC$,$FG \perp$ 平面 $ADGC$,M,N 分别是 AC,BF 的中点,且 $BC = EF = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}FG$.



(Ⅰ)求证:$MN /\!/$ 平面 AFG;

(Ⅱ)求直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值.

19.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且$\sqrt{3}c + a = b\cos C - c\cos B$.

(Ⅰ)求角 B 的大小;

(Ⅱ)若 D 是 AC 边上一点,且 $BD = CD = \frac{1}{3}b$,求 $\cos\angle BDA$.

20.(本小题满分 12 分)

已知斜率为$\sqrt{3}$的直线 l 与抛物线 C:$y^2 = 4x$ 相交于 P,Q 两点.

(Ⅰ)求线段 PQ 中点纵坐标的值;

(Ⅱ)已知点 $T(\sqrt{3},0)$,直线 TP,TQ 分别与抛物线相交于 M,N 两点(异于 P,Q).求证:直线 MN 恒过定点,并求出该定点的坐标.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - ax^3\sin x$,其中 $a \in \mathbf{R}$.

(Ⅰ)当 $a = 1$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点(π,π^4)处的切线方程;

(Ⅱ)若 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,求 a 的取值范围.

请考生在第 22,23 题中任选择一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.作答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22.(本小题满分 10 分)选修 4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - \dfrac{2t}{3} \end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \dfrac{4}{1 + 3\sin^2\theta}$.

(Ⅰ)求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(Ⅱ)若 P 是曲线 C 上一点,Q 是直线 l 上一点,求$|PQ|$的最小值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - m|$,且不等式 $f(x) < 3$ 的解集为$(1,n)$.

(Ⅰ)求实数 m,n 的值;

(Ⅱ)若正实数 a,b,c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = m$,证明:$\dfrac{a^4}{b^2+1} + \dfrac{b^4}{c^2+1} + \dfrac{c^4}{a^2+1} \geq \dfrac{1}{4}$.

成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C; 2.B; 3.A; 4.C; 5.A; 6.B; 7.D; 8.C; 9.D; 10.D; 11.A; 12.B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$; 14. 81; 15. 10; 16. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由题得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(9+9.5+10+10.5+11)=10$, ……1分

$\bar{y}=\frac{1}{5}(11+10+8+6+5)=8$. ……2分

$\because \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-8$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=2.5$, $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=26$, ……5分

$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99$.

$\because y$ 与 x 的相关系数近似为 -0.99,说明 y 与 x 的线性相关性很强,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……6分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-8}{2.5}=-3.2$, $\hat{a}=\bar{y}+3.2\bar{x}=40$, ……9分

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$. ……10分

当 $x=8.5$ 时, $\hat{y}=12.8$.

$\therefore$ 当产品定价为8.5元时,预测销量可达到12.8万件. ……12分

18. 解:(Ⅰ)如图,设 P 是 CG 的中点,连接 PM, PN.

$\because M$ 为 AC 的中点, $\therefore PM /\!/ AG$.

又 $PM \not\subset$ 平面 AGF, $AG \subset$ 平面 AGF,

$\therefore PM /\!/$ 平面 AGF. ……2分

同理可得, $PN /\!/$ 平面 AGF.

$\because PM \cap PN=P$, $PM, PN \subset$ 平面 PMN,

$\therefore$ 平面 $PMN /\!/$ 平面 AGF. ……5分

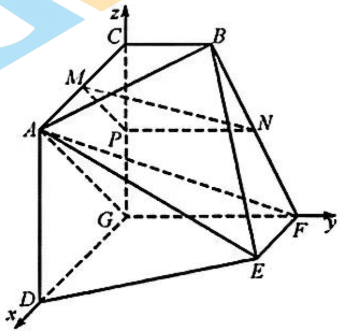
又 $MN\subset$平面 PMN，∴$MN\parallel$平面 AGF. ……6 分

(Ⅱ)∵$FG\perp$平面 $ADGC$，CG，$DG\subset$平面 $ADGC$，

∴$FG\perp CG$，$FG\perp DG$.

以 G 为坐标原点，$\overrightarrow{GD}$，$\overrightarrow{GF}$，$\overrightarrow{GC}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Gxyz$. 不妨设 $BC=1$，则 $G(0,0,0)$，$M(1,0,2)$，

$N(0,\frac{3}{2},1)$；$B(0,1,2)$，$E(1,2,0)$，$F(0,2,0)$，



$\overrightarrow{MN}=(-1,\frac{3}{2},-1)$，$\overrightarrow{BE}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BF}=(0,1,-2)$.

……8 分

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x+y-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. ……10 分

设 MN 与平面 BEF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MN}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MN}|}=\frac{2}{\frac{\sqrt{17}}{2}\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{85}}{85}$.

∴直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值为$\frac{4\sqrt{85}}{85}$. ……12 分

19. 解：(Ⅰ)∵$\sqrt{3}c+a=b\cos C-c\cos B$，

由正弦定理有$\sqrt{3}\sin C+\sin A=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……2 分

∵$\sin A=\sin(B+C)$，

∴$\sqrt{3}\sin C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……4 分

∴$2\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C=0$. ……5 分

又 $C\in(0,\pi)$，∴$\sin C\neq0$.

∴$\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{5\pi}{6}$. ……6 分

(Ⅱ)在△BCD 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\frac{2b^2-9a^2}{2b^2}$.

在△ABD 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDA=\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{5b^2-9c^2}{4b^2}$.

∵$\angle BDC+\angle BDA=180^\circ$，∴$\cos\angle BDC=-\cos\angle BDA$.

即$\frac{2b^2-9a^2}{2b^2}=-\frac{5b^2-9c^2}{4b^2}$，整理得 $b^2=c^2+2a^2$. ……9 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $-\dfrac{a^2}{2ac}=-\dfrac{a}{2c}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ∴ $a=\sqrt{3}c$.

∴ $b^2-c^2=6c^2$，即 $b=\sqrt{7}c$. ……11 分

∴ $\cos\angle BDA=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}=\dfrac{13}{14}$. ……12 分

20. 解：(Ⅰ)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$.

由 $\begin{cases}y_1^2=4x_1\\ y_2^2=4x_2\end{cases}$，得 $y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$. 化简得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$. ……2 分

∴ $\sqrt{3}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，即 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

∴线段 PQ 中点纵坐标的值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……4 分

(Ⅱ)设 $P(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$Q(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，$M(\dfrac{y_3^2}{4},y_3)$，$N(\dfrac{y_4^2}{4},y_4)$.

∴ $k_{PM}=\dfrac{y_1-y_3}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_3^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_3}$. ……6 分

∴直线 PM 的方程为 $y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_3}(x-\dfrac{y_1^2}{4})$，化简可得 $(y_1+y_3)y-4x-y_1y_3=0$.

∵ $T(\sqrt{3},0)$ 在直线 PM 上，解得 $y_1y_3=-4\sqrt{3}$. ……8 分

同理，可得 $y_2y_4=-4\sqrt{3}$.

∴ $k_{PQ}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{4}{\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_3}+\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_4}}=\dfrac{y_3y_4}{-\sqrt{3}(y_3+y_4)}=\sqrt{3}$. ……10 分

∴ $y_3y_4=-3(y_3+y_4)$.

又直线 MN 的方程为 $(y_3+y_4)y-4x-y_3y_4=0$，即 $(y_3+y_4)(y+3)-4x=0$.

∴直线 MN 恒过定点 $(0,-3)$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=x^4-x^3\sin x$.

∴ $f'(x)=4x^3-(3x^2\sin x+x^3\cos x)$. ∴ $f'(\pi)=5\pi^3$. ……3 分

∴曲线 $y=f(x)$ 在点 (π,π^4) 处的切线方程为 $5\pi^3x-y-4\pi^4=0$. ……4 分

(Ⅱ)由题知 $f(x)=x^3(x-a\sin x)$，不妨设 $g(x)=x-a\sin x$.

∴ $g'(x)=1-a\cos x$. ……5 分

(i)当 $a\leqslant 1$ 时，不妨设 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

∵ $\cos x\in(0,1)$. ∴ $g'(x)>0$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上恒成立.

∴ $g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……6 分

又 $g(0)=0$，

$\therefore$当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$g(x)>g(0)=0$. ……7 分

$\because f(x)=x^3g(x)$，

$\therefore f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$.

$\therefore$当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递减；

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. ……9 分

(ii)当 $a>1$ 时，不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\therefore \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减. ……10 分

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时，$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在 $x\in(0,x_0)$上单调递减. ……11 分

$\therefore x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述，当 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点时，a 的取值范围为$(-\infty,1]$. ……12 分

22. 解：(Ⅰ)由直线 l 的参数方程，得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)，设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6 分

由题知$|PQ|$的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8 分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$时，$d$ 的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore |PQ|$的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)$\because f(1)=3$，$f(n)=3$，且 $n>1$，

$\therefore 3+|1-m|=3$，解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2 分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i)当 $1<n\leqslant 2$ 时，由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$，解得 $n=1$(不合题意，舍去)；

(ii)当 $n>2$ 时，由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$，解得 $n=\frac{5}{2}$，经检验满足题意.

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)>g(0)=0$. ……7 分

$\because f(x)=x^3g(x)$，

$\therefore f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减；

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. ……9 分

(ii)当 $a>1$ 时，不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\therefore \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减. ……10 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减. ……11 分

$\therefore x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述，当 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点时，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……12 分

22. 解：(Ⅰ)由直线 l 的参数方程，得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)，设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6 分

由题知 $|PQ|$ 的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8 分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in \mathbf{Z})$ 时，d 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)$\because f(1)=3$，$f(n)=3$，且 $n>1$，

$\therefore 3+|1-m|=3$，解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2 分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i)当 $1<n\leqslant 2$ 时，由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$，解得 $n=1$(不合题意，舍去)；

(ii)当 $n>2$ 时，由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$，解得 $n=\frac{5}{2}$，经检验满足题意.

综上所述，$m=1,n=\frac{5}{2}$. ……5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $m=1$. $\therefore a^2+b^2+c^2=1$.

$\because (\frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1})(a^2+1+b^2+1+c^2+1)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$, ……8分

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\geq\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$. 当且仅当 $\frac{a^4}{(b^2+1)^2}=\frac{b^4}{(c^2+1)^2}=\frac{c^4}{(a^2+1)^2}$，即

$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{1}{4}$. ……10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。