2023 北京一七一中高一 12 月月考

数　　学

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设集合 $U=\{x\in\mathbf{N}|x\le 6\}$，$M=\{1,2,3,5\}$，$N=\{2,3,4\}$，则 $(\complement_U M)\cup N=$（　）

A. $\{4\}$　　B. $\{0,2,6\}$　　C. $\{2,3,4,6\}$　　D. $\{0,2,3,4,6\}$

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=2^x$ 的图象关于 x 轴对称，则 $f(x)=$（　）

A. -2^x　　B. 2^{-x}　　C. $-\log_2 x$　　D. $\log_2 x$

3. 已知 $a>b$，$ab\ne 0$，下列不等式恒成立的是（　）

A. $a^2>b^2$　　B. $2^a>2^b$

C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a>\left(\frac{1}{3}\right)^b$

4. 下列函数中是奇函数的是（　）

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\ln x$　　C. $y=2^{-x}+2^x$　　D. $y=x^3$

5. 已知 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于 $90°$ 的角$\}$，那么 A、B、C 的关系是（　）

A. $B=A\cap C$　　B. $B\cup C=C$　　C. $A\subset C$　　D. $A=B=C$

6. 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{5}{x}$，则下列区间中含有 $f(x)$ 的零点的是（　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

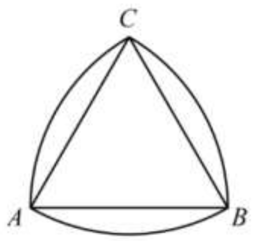
7. 已知指数函数 $y=a^x$ 是减函数，若 $m=a^2$，$n=2^a$，$p=\log_a 2$，则 m，n，p 的大小关系是（　）

A. $m>n>p$　　B. $n>m>p$　　C. $n>p>m$　　D. $p>n>m$

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, x<1\\ \log_a x, x\ge 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　C. $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$

9. 以等边三角形每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间作一段弧，三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形勒洛三角形是由德国机械工程专家、机构运动学家勒洛首先发现，所以以他的名字命名．一些地方的市政检修井盖、方孔转机等都有应用勒洛三角形如图，已知某勒洛三角形的三段弧的总长度为 π，则该勒洛三角形的面积为（　）



A. $\pi-\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}$　　C. $\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|3^{x+1}-1\right|, x\leqslant 0\\ \ln x, x>0\end{cases}$ 若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-a$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围是（　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(0,2\right]$　　C. $\left(2,+\infty\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 角 45° 化为弧度制等于________.

12. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\lg\left(x-1\right)$ 的定义域为______.

13. 已知函数 $f(x)$ 是指数函数，若 $\dfrac{f(1)}{f(3)}=4$，则 $f(-2)$____ $f(-3)$.(用“>”“<”“=”填空）

14. 若 $a,b<0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a-b}$，求 $\dfrac{b}{a}=$________.

15. 若函数 $f\left(x\right)=\log_2\left(x^2-ax+3a\right)$ 在区间 $\left[2,+\infty\right)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题（共 6 小题，16-20 每小题 8 分，21 题 10 分，共 50 分）

16. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|1<2^x<16\right\}$.

（I）求 $\left(\complement_U A\right)\cap B$；

（II）设非空集合 $D=\left\{x\middle|a<x<2a+3,a\in\mathbf{R}\right\}$，若 $D\subseteq\complement_U A$，求实数 a 的取值范围.

17. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

（2）求 $\dfrac{\sin^2\left(2\pi+\alpha\right)}{\cos\left(\pi+\alpha\right)}+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\pi+\alpha\right)$ 的值.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$.

（1）若 $f\left(a\right)=1$，求 a 的值；

（2）判断函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（3）若 $f\left(x\right)\geq m$ 对于 $x\in\left[3,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 m 的范围.

19. 已知函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$ 是奇函数.

（I）求 a 的值；

（II）判断 $f(x)$ 的单调性；（只需写出结论）

（III）若不等式 $f\left(x-x^2\right)+f\left(x+m\right)<0$ 恒成立，求 m 的取值范围.

20. 某食品的保鲜时间 y（单位：小时）与储存温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=e^{kx+b}$（$e=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k，b 为常数）.若该食品在 0℃的保鲜时间为 192 小时，在 33℃的保鲜时间是 24 小时，

（1）求 k 的值；

（2）求该食品在 22℃的保鲜时间.

21. 若集合 $A=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$，其中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为非空集合，$B_i\cap B_j=\varnothing(1\le i<j\le n)$，则称集合 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 为集合 A 的一个 n 划分.

（1）写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有不同的 2 划分；

（2）设 $\{B_1,B_2\}$ 为有理数集 Q 的一个 2 划分，且满足对任意 $x\in B_1$，任意 $y\in B_2$，都有 $x<y$．则下列四种情况哪些可能成立，哪些不可能成立？可能成立的情况请举出一个例子，不能成立的情况请说明理由；

① B_1 中的元素存在最大值，B_2 中的元素不存在最小值；

② B_1 中的元素不存在最大值，B_2 中的元素存在最小值；

③ B_1 中的元素不存在最大值，B_2 中的元素不存在最小值；

④ B_1 中的元素存在最大值，B_2 中的元素存在最小值.

（3）设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,16\}$，对于集合 A 的任意一个 3 划分 $\{B_1,B_2,B_3\}$，证明：存在 $i\in\{1,2,3\}$，存在 $a,b\in B_i$，使得 $b-a\in B_i$.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.【答案】D

【分析】根据集合的运算，即可得到结果.

【详解】因为 $U=\{x\in\mathbf{N}|x\le 6\}$，$M=\{1,2,3,5\}$

则 $\complement_U M=\{0,4,6\}$，且 $N=\{2,3,4\}$

所以 $(\complement_U M)\cup N=\{0,2,3,4,6\}$.

故选:D.

2.【答案】A

【分析】

由点 (x,y) 是函数 $f(x)$ 上任意一点，则点 $(x,-y)$ 在函数 $y=2^x$ 的图像上，列出方程，即可得到正确答案.

【详解】设点 (x,y) 是函数 $f(x)$ 上任意一点，则点 $(x,-y)$ 在函数 $y=2^x$ 的图像上

即 $-y=2^x\Rightarrow y=-2^x$

所以函数 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=-2^x$

故选：A

【点睛】本题主要考查了函数图像的对称性，属于中档题.

3.【答案】B

【分析】应用特殊值 $a=1,b=-2$ 判断 A、C；由指数函数的单调性判断 B、D.

【详解】$a=1,b=-2$ 时 $a^2<b^2$、$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，A、C 错；

B：由 $y=2^x$ 在定义域上递增，则 $2^a>2^b$，对；

D：由 $y=(\frac{1}{3})^x$ 在定义域上递减，则 $\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$，错；

故选：B

4.【答案】D

【分析】利用奇偶函数定义即可判断每个选项

【详解】对于 A，令 $f(x)=\sqrt{x^2}$，其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，故 A 不正确；

对于 B，令 $g(x)=\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，故不是奇函数，故 B 不正确；

对于 A，令 $h(x)=2^{-x}+2^x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $h(-x)=2^x+2^{-x}=2^{-x}+2^x=h(x)$，

所以 $h(x)$ 为偶函数，故 C 不正确；

对于 A，令 $F\left(x\right)=x^3$，其定义域为$\mathbf{R}$，且$F(-x)=\left(-x\right)^3=-x^3=-F(x)$，

所以$F\left(x\right)$为奇函数，故 D 正确；

故选：D

5.【答案】B

【分析】分别判断 A，B，C 的范围即可求出；

【详解】解：$\because A=\{$第一象限角$\}=(k\cdot 360°,90°+k\cdot 360°)$，$k\in Z$；$B=\{$锐角$\}=(0,90°)$，

$C=\{$小于$90°$的角$\}=(-\infty,90°)$

$\therefore B\subseteq C$，$B\subseteq A$

$\therefore B\cup C=C$，$B\bigcap A=B$；

$\because$ “小于$90°$的角”里边有“第一象限角”，从而$B\neq A\cap C$．

故选：B．

6.【答案】C

【分析】

分析函数$f\left(x\right)$的单调性，利用零点存在定理可得出结论.

【详解】由于函数$y=2^x$为增函数，函数$y=-\dfrac{5}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均为增函数，

所以，函数$f\left(x\right)=2^x-\dfrac{5}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均为增函数.

对于 A 选项，当$x\in(-1,0)$时，$2^x>0$，$-\dfrac{5}{x}>0$，此时，$f\left(x\right)>0$，

所以，函数$f\left(x\right)$在$(-1,0)$上无零点；

对于 BCD 选项，当$x>0$时，$f\left(1\right)=-3<0$，$f\left(2\right)=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}>0$，

由零点存在定理可知，函数$f\left(x\right)$的零点在区间$(1,2)$内.

故选：C

7.【答案】B

【分析】

由已知可知$0<a<1$，再利用指对幂函数的性质，比较 m，n，p 与 0，1 的大小，即可得解.

【详解】由指数函数$y=a^x$是减函数，可知$0<a<1$，

结合幂函数$y=x^2$的性质可知$0<a^2<1$，即$0<m<1$

结合指数函数$y=2^x$的性质可知$1<2^a<2$，即$1<n<2$

结合对数函数$y=\log_a x$的性质可知$\log_a 2<0$，即$p<0$，$\therefore n>m>p$

故选：B.

【点睛】方法点睛：本题考查比较大小，比较指数式和对数式的大小，可以利用函数的单调性，引入中间量；有时也可用数形结合的方法，解题时要根据实际情况来构造相应的函数，利用函数单调性进行比较，如果指数相同，而底数不同则构造幂函数，若底数相同而指数不同则构造指数函数，若引入中间量，一般选 0 或 1.

8.【答案】C

【分析】分段函数是减函数，就要求每一段都是减函数，并且满足$(3a-1)\times1+4a\geq\log_a1=0$，解不等式组即得解.

【详解】当$x<1$，$f(x)=(3a-1)x+4a$是减函数，所以$3a-1<0$，即$a<\frac{1}{3}$ ①；

当$x\geq1$，$f(x)=\log_a x$也是减函数，故$0<a<1$ ②；

在衔接点 x=1，必须要有$(3a-1)\times1+4a\geq\log_a1=0$成立，才能保证$f(x)$在$x\in(-\infty,+\infty)$上是减函数，

即$a\geq\frac{1}{7}$ ③，

∴由①②③取交集，得$\frac{1}{7}\leq a<\frac{1}{3}$.

故选：C.

9.【答案】B

【分析】设等边三角形 ABC 的边长为a，由题意可得$\frac{\pi}{3}a=\frac{\pi}{3}$，进而求出$a$的值，再求出扇形 ABC 的面积和等边三角形 ABC 的面积，从而求出该勒洛三角形的面积.

【详解】设等边三角形 ABC 的边长为a，

则由题意得：$\frac{\pi}{3}\times a=\frac{1}{3}\times\pi$，解得：$a=1$，

所以扇形 ABC 的半径为1，圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则其面积为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times1^2=\frac{\pi}{6}$，

又等边三角形 ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

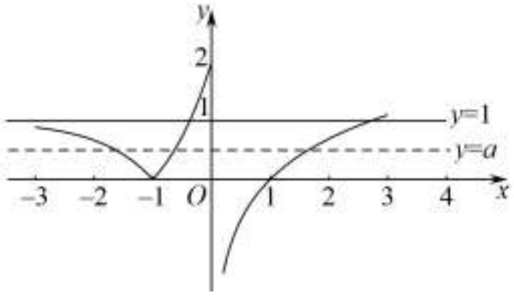
则该勒洛三角形的面积为$\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times3+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$，

故选：B.

10.【答案】A

【分析】要使函数$g(x)=f(x)-a$有三个零点，则$f(x)=a$有三个不相等的实根，即$f(x)$与$y=a$的图象有三个交点，结合函数的性质及图象即可得出.

【详解】



要使函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-a$ 有三个零点，则 $f(x)=a$ 有三个不相等的实根，即 $f\left(x\right)$ 与 $y=a$ 的图象有三个交点，

当 $x\le -1$ 时，$f\ \ x\ \ =1-3^{x+1}$ 在 $\left(-\infty,-1\right]$ 上单调递减，$f(x)\in\ 0,1$ ；

当 $-1<x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=3^{x+1}-1$ 在 $\left(-1,0\right]$ 上单调递增，$f(x)\in\ 0,2$ ；

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$f\left(x\right)\in\mathbf{R}$；

由 $f\left(x\right)$ 与 $y=a$ 的图象有三个交点，结合函数图象可得 $a\in\left(0,1\right)$，

故选：A.

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【分析】根据角度制与弧度制的转化公式求解即可.

【详解】因为 $180^{\circ}=\pi$，

所以 $45^{\circ}=45\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{4}$.

12. 【答案】$(1,+\infty)$

【分析】

根据对数型复合函数定义域可得：$\begin{cases}x\ge 0\\ x-1>0\end{cases}$，解不等式即可求解.

【详解】由 $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\lg\left(x-1\right)$，

则 $\begin{cases}x\ge 0\\ x-1>0\end{cases}$，解得 $x>1$，

所以函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

故答案为：$(1,+\infty)$

13. 【答案】$<$

【分析】

根据题意，设 $f(x)=a^x\left(a>0 且 a\neq 1\right)$，结合题中条件，确定 $0<a<1$，根据指数函数单调性，即可得出结果.

【详解】因为 $f(x)$ 是指数函数，所以可设 $f(x)=a^x\left(a>0 且 a\neq 1\right)$，

又 $\dfrac{f(1)}{f(3)}=4>1$，所以 $a>a^3$，则 $0<a<1$，

即函数 $f(x)$ 是减函数，所以 $f(-2)<f(-3)$.

故答案为：$<$.

14.【答案】$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【分析】根据已知可得 $\dfrac{b}{a}>0$ 且 $\dfrac{b}{a}=1-(\dfrac{b}{a})^2$，解方程即可得答案.

【详解】由题设 $a\neq b$，且 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=1$，$\dfrac{b}{a}>0$，

所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{b}{a}(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a})=1-(\dfrac{b}{a})^2$，即 $(\dfrac{b}{a})^2+\dfrac{b}{a}-1=0$，可得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

15.【答案】$\left(-4,4\right]$

【分析】令 $t=x^2-ax+3a$，由题设易知 t 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上为增函数且恒大于零，根据二次函数的性质列不等式组求 a 的取值范围.

【详解】由题设，令 $t=x^2-ax+3a$，而 $y=\log_2 t$ 为增函数，

$\therefore$ 要使 $f(x)$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上是增函数，即 $t=x^2-ax+3a$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上为增函数且恒大于零，

$\begin{cases}\dfrac{a}{2}\le 2\\ 4+a>0\end{cases}$，可得 $-4<a\le 4$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left(-4,4\right]$.

故答案为：$\left(-4,4\right]$

三、解答题（共 6 小题，16-20 每小题 8 分，21 题 10 分，共 50 分）

16.【答案】(I) $\left\{x\middle|3\le x<4\right\}$；(II) $\left(-3,-2\right]\cup\left[3,+\infty\right)$.

【分析】

(I) 分别解不等式，化简两集合，再由交集和补集的概念，即可求出结果；

(II) 由 (I)，根据集合 D 非空，且 $D\subseteq \complement_U A$，列出不等式求解，即可得出结果.

【详解】(I) 因为 $A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\}=\left\{x\middle|-1<x<3\right\}$，$B=\left\{x\middle|1<2^x<16\right\}=\left\{x\middle|0<x<4\right\}$，

所以 $\complement_U A=\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 3\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=\{x|3\le x<4\}$；

（II）因为非空集合 $D=\{x|a<x<2a+3,a\in\mathbf{R}\}$，且 $D\subseteq\complement_U A$，

所以 $\begin{cases}a<2a+3\\a\ge 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<2a+3\\2a+3\le -1\end{cases}$，

解得 $a\ge 3$ 或 $-3<a\le -2$，

即实数 a 的取值范围是 $(-3,-2]\cup[3,+\infty)$.

17.【答案】（1）$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$；

（2）0.

【分析】（1）应用平方关系、商数关系求正弦值和正切值；

（2）应用诱导公式化简求值.

【小问 1 详解】

由 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$；

【小问 2 详解】

原式 $=\dfrac{\sin^2\alpha}{-\cos\alpha}+\sin\alpha\tan\alpha=-\sin\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\tan\alpha=0$.

18.【答案】（1）-3

（2）奇函数，证明见解析

（3）$(-\infty,-1]$

【分析】（1）代入 $x=a$，得到 $\log_2\dfrac{a-1}{a+1}=1$，利用对数的运算即可求解；

（2）先判断奇偶性，然后分析定义域并计算 $f(x),f(-x)$ 的数量关系，由此完成证明；

（3）将已知转化为 $m\le[f(x)]_{\min}$，求出 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 的最小值，即可得解.

【小问 1 详解】

$\because f(a)=1$，$\therefore\log_2\dfrac{a-1}{a+1}=1$，即 $\dfrac{a-1}{a+1}=2$，解得 $a=-3$，

所以 a 的值为 -3

【小问 2 详解】

$f(x)$ 为奇函数，证明如下：

由 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}>0\\x+1\ne 0\end{cases}$，解得：$x>1$ 或 $x<-1$，所以定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 关于原点对称，

又 $f(-x)=\log_2\frac{-x-1}{-x+1}=\log_2\frac{x+1}{x-1}=\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}=-\log_2\frac{x-1}{x+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数；

【小问 3 详解】

因为 $f(x)=\log_2\frac{x-1}{x+1}=\log_2\frac{x+1-2}{x+1}=\log_2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$，

又外部函数 $y=\log_2 u$ 为增函数，内部函数 $y=1-\frac{2}{x+1}$ 在 $[3,+\infty)$ 上为增函数，

由复合函数的单调性知函数 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(3)=\log_2\frac{3-1}{3+1}=\log_2\frac{1}{2}=-1$，

又 $f(x)\geq m$ 对于 $x\in[3,+\infty)$ 恒成立，所以 $m\leq[f(x)]_{\min}$，所以 $m\leq-1$，

所以实数 m 的范围是 $(-\infty,-1]$

19.【答案】（I） $a=\frac{1}{2}$；（II）增函数；（III） $(-\infty,-1)$.

【分析】

（I）根据题意可知 $f(0)=0$，即可列出等式求解 a；（II） $f(x)$ 的值随着 x 的值增大而增大，故函数 $f(x)$ 为增函数；（III）根据函数的奇偶性可将不等式转化为 $f(x^2-x)>f(x+m)$，再由函数的单调性可得 $x^2-2x-m>0$ 恒成立，则 $=4+4m<0$，即可得解.

【详解】（I）因为 $f(x)$ 为奇函数，定义域为 R，

所以 $f(0)=0$，即 $a-\frac{1}{2}=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

当 $a=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，此时 $f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2}-\frac{2^x}{2^x+1}=0$ 即 $f(-x)=-f(x)$，函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$ 为奇函数.

（II） $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$ 为增函数

（III）不等式 $f(x-x^2)+f(x+m)<0$ 恒成立，即 $f(x+m)<-f(x-x^2)$ 恒成立，

因为 $f(x)$ 在定义域 R 上是奇函数，所以 $f(x^2-x)>f(x+m)$，

又 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$ 为增函数，所以 $x^2-x>x+m$ 恒成立，

由 $x^2-2x-m>0$ 恒成立，有△ $=4+4m<0$，解得 $m<-1$，

所以，m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

20.【答案】(1) $k=-\dfrac{\ln 2}{11}$；

(2) 48 小时.

【分析】(1) 由题设可得 $\begin{cases}b=\ln 192\\33k+b=\ln 24\end{cases}$，即可求参数 k；

(2) 由 (1) 得 $-\dfrac{\ln 2}{11}x+\ln 192=\ln y$，将 $x=22$ 代入求 y 即可

【小问 1 详解】

由题设 $kx+b=\ln y$，则 $\begin{cases}b=\ln 192\\33k+b=\ln 24\end{cases}$，可得 $\begin{cases}b=\ln 192\\k=\dfrac{1}{11}\ln\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

所以 $k=\dfrac{1}{11}\ln\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\ln 2}{11}$；

【小问 2 详解】

由 (1) 知：$-\dfrac{\ln 2}{11}x+\ln 192=\ln y$，

当 $x=22$，则 $\ln y=-2\ln 2+\ln 192=\ln\dfrac{192}{4}=\ln 48$，

所以 $y=48$ 小时.

21.【答案】(1) $\{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\}$

(2) ①可能成立，例子见解析；②可能成立，例子见解析；③可能成立，例子见解析；④不可能成立，证明过程见解析；

(3) 证明过程见解析.

【分析】(1) 根据题意写出含有 3 个元素的 2 划分即可；

(2) ①②③可以举出反例，④可以利用反证法进行证明；

(3) 用反证法进行证明，

【小问 1 详解】

集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有不同的 2 划分为 $\{\{1,2\},\{3\}\},\{\{1,3\},\{2\}\},\{\{2,3\},\{1\}\}$

【小问 2 详解】

①可能成立，举例如下：$B_1=\{x\in Q|x\le 1\}$，$B_2=\{x\in Q|x>1\}$；

②可能成立，举例如下：$B_1=\{x\in Q|x<1\}$，$B_2=\{x\in Q|x\ge 1\}$；

③可能成立，举例如下：$B_1=\{x\in Q|x<\sqrt{2}\}$，$B_2=\{x\in Q|x>\sqrt{2}\}$；

④不可能成立，证明如下：假设④成立，不妨设 B_1 中元素的最大值为 s，B_2 中元素的最小值为 t，由题可

知：$s<t$，所以 $s<\frac{s+t}{2}<t$，

因为 s 为 B_1 中元素的最大值，所以 $\frac{s+t}{2}\notin B_1$，

因为 t 为 B_2 中元素的最小值，所以 $\frac{s+t}{2}\notin B_2$，

因为 $B_1\cup B_2=Q$，所以 $\frac{s+t}{2}\notin Q$，

这与 $\frac{s+t}{2}\in Q$ 矛盾，

所以假设不成立，即④不可能成立；

【小问 3 详解】

由于集合 A 中有 16 个元素，所以 B_1,B_2,B_3 中至少有一个集合至少包含 6 个元素，

不妨设 B_1 中至少包含 6 个元素，

设 $b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\in B_1$，且 $b_1<b_2<b_3<b_4<b_5<b_6$，

假设对任意 $i\in\{1,2,3\}$，对任意 $a,b\in B_i$，都有 $b-a\notin B_i$，

那么 $b_6-b_1,b_6-b_2,b_6-b_3,b_6-b_4,b_6-b_5\notin B_1$，

又因为 $b_6-b_1,b_6-b_2,b_6-b_3,b_6-b_4,b_6-b_5\in A$，

所以 $b_6-b_1,b_6-b_2,b_6-b_3,b_6-b_4,b_6-b_5\in B_2\cup B_3$，

则 B_2，B_3 中必有一个集合至少包含 $b_6-b_1,b_6-b_2,b_6-b_3,b_6-b_4,b_6-b_5$ 中的 3 个元素，

不妨设这 3 个元素为 $a_1,a_2,a_3\in B_2,a_1<a_2<a_3$，

由假设可知：$a_3-a_1,a_3-a_2,a_2-a_1\notin B_2$，

对任意 $i,j\left(1\le j<i\le 3\right)$，存在 $m,n\left(1\le m<n\le 5\right)$，

都有 $a_i-a_j=b_6-b_m-b_6+b_n=b_n-b_m\notin B_1$，

又因为 $a_3-a_1,a_3-a_2,a_2-a_1\in B_3$，而 $a_3-a_1-\left(a_3-a_2\right)=a_2-a_1$，与假设矛盾，

所以假设不成立，

所以存在 $i\in\{1,2,3\}$，存在 $a,b\in B_i$，使得 $b-a\in B_i$

【点睛】对于集合新定义证明类题目，要能正确理解题意，再采取合适的方法进行求解，列举法和反证法是经常使用的方法，先假设条件不成立，再通过逻辑推理得到矛盾，从而证明出结论.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！