# 北京一六一中学 2023—2024 学年度第二学期开学测试

# 高 三 数 学 试 卷

班级__________ 姓名__________ 学号__________

| 考生须知 | |
|---|---|
| | 1．本试卷共 3 页，满分 150 分，考试时长 120 分钟。 |
| | 2．试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效。 |
| | 3．在答题纸上，选择题用 2B 铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答。 |
| | 4．考试结束后，将答题纸、试卷和草稿纸一并交回。 |

**一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置．**

1．已知集合 $A=\{x|x^2-2x<0\},B=\{x|2^x>1\}$，则

A．$B\subseteq A$　　B．$A\subseteq B$　　C．$A\cup B=\mathbf{R}$　　D．$A\cap B=\varnothing$

2．若复数 $z$ 满足 $\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=2$，则复数 $z$ 的虚部是

A．$-3$　　B．$3$　　C．$1$　　D．$0$

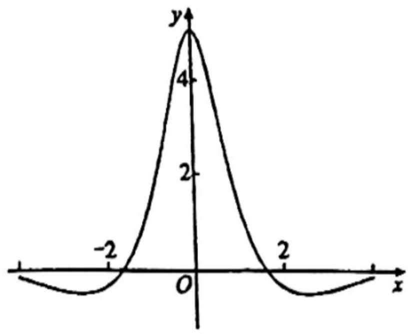
3．已知函数 $f(x)=2^x-1$，则不等式 $f(x)\le x$ 的解集为

A．$(-\infty,2]$　　B．$[0,1]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[1,2]$

4．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，角 $\alpha$ 以 $Ox$ 为始边，终边与单位圆交于点 $P\left(x_0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\pm\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

5．函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为




A．$\dfrac{5(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}$　　B．$\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

C．$\dfrac{5(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x^2+2}$　　D．$\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

6. 设$n$为正整数，$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中存在常数项，则$n$的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 已知$a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\ln\frac{1}{2}$，$c=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，则

A. $b<a<c$　　B. $b<c<a$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 若不等式$(-1)^n na<n+(-1)^{n+1}$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数$a$的取值范围是

A. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left[-2,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}-a_n=2d$ $(n=1,2,\cdots)$，其中$d$为常数，则“$a_4-a_1=3d$”是“$\{a_n\}$是等差数列”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10.已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=1,<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{4},(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，则$|\vec{c}|$的最大值是

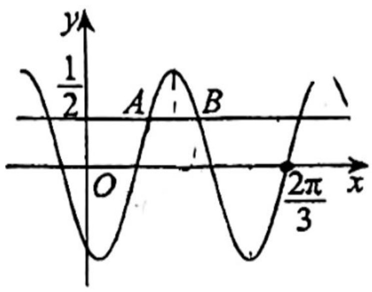
A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $\sqrt{2}+1$

二、填空题：本大题共5小题，共25分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

11.函数$y=\lg(2x+1)+\lg x$的零点是__________.

12.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，则$a=$________.

13.已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，如图$A,B$是直线$y=\frac{1}{2}$与曲线$y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则$\omega=$__________，$f(\pi)=$__________.



14.设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F$，准线为$l$．斜率为$\sqrt{3}$的直线经过焦点$F$，交抛物线$C$于点$A$，交准线$l$于点$B$（$A,B$在$x$轴的两侧）.若$|AB|=6$，则抛物线的方程为________.

15.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，$P$是空间中任意一点．给出下列四个结论：

① 若点$P$在线段$AD_1$上运动，则始终有$C_1P\perp CB_1$；

② 若点$P$在线段$AD_1$上运动，三棱锥$D-BPC_1$体积为定值；

③ 若点$P$在线段$AA_1$上运动，则过$P$，$B$，$D_1$三点的正方体截面面积的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$；

④ 若点$P$在线段$A_1B$上运动，则$AP+PD_1$的最小值为$\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

其中所有正确结论的序号有________.

**三、解答题：本大题共6小题，共85分.把答案填在答题纸中相应的位置上.**

16.（本小题13分）在$\Delta ABC$中，$a,b,c$分别为内角$A,B,C$所对的边，且满足$\sin A\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$.

（Ⅰ）求角A的大小；

（Ⅱ）试从条件①②③中选出两个作为已知，使得$\Delta ABC$存在且唯一，并以此为依据求$\Delta ABC$的面积.

条件①：$c=\sqrt{3}b$；　　条件②：$B=\frac{\pi}{4}$；　　条件③：$a=2$.

注：如果选择的条件不符合要求，得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. （本小题 13 分）某学校体育课进行投篮练习，投篮地点分为 A 区和 B 区，每一个球可以选择在 A 区投篮也可以选择在 B 区投篮，在 A 区每投进一球得 2 分，没有投进得 0 分；在 B 区每投进一球得 3 分，没有投进得 0 分.学生甲在 A，B 两区的投篮练习情况统计如下表：

| 甲 | A 区 | $B$ 区 |
|---|---|---|
| 投篮次数 | 30 | 20 |
| 得分 | 40 | 30 |

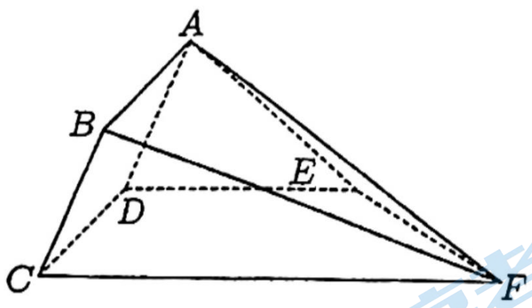
假设用频率估计概率，且学生甲每次投篮相互独立.

（Ⅰ）试分别估计甲在 A 区，B 区投篮命中 概率；

（Ⅱ）若甲在 A 区投 3 个球，在 B 区投 2 个球，求甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率；

（Ⅲ）若甲在 A 区，B 区一共投篮 5 次，投篮得分的期望值不低于 7 分，直接写出甲选择在 A 区投篮的最多次数.（结论不要求证明）

18. （本小题 14 分）如图，多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$\angle ADE=60^\circ$，$DE \parallel CF$，$CD \perp DE$，$AD=2$，$DE=DC=3$，$CF=6$.




（Ⅰ）求证：$CD \perp AE$；

（Ⅱ）求直线 $DE$ 与平面 $AEF$ 所成角的正弦值；

（Ⅲ）求出 $\lambda$ 的值，使得 $\overline{CG}=\lambda\overline{CF}$，且 G 到平面 ABC 距离为 $\sqrt{3}$.

19.（本小题 15 分）已知函数 $f(x)=x-1+\dfrac{a}{e^x}$（$a\in R,e$ 为自然对数的底数）

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线平行于 $x$ 轴，求 $a$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，若直线 $l:y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 没有公共点，求 $k$ 的最大值.

20.（本小题 15 分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的离心率和短轴长；

（Ⅱ）设直线 $l_1:y=kx+m$ 与椭圆 $E$ 相切于第一象限内的点 $P$，不过原点 $O$ 且平行于 $l_1$ 的直线 $l_2$ 与椭圆 $E$ 交于不同的两点 $A$，$B$，点 $A$ 关于原点 $O$ 的对称点为 $C$．记直线 $OP$ 的斜率为 $k_1$，直线 $BC$ 的斜率为 $k_2$，求 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 的值.

21.（本小题 15 分）

对于数列 $A:a_1$，$a_2$，…，$a_n(n\geq 3)$，定义变换 $T$，$T$ 将数列A变换成数列 $T(A):a_2$，$a_3$，…，$a_n$，$a_1$，记 $T^1(A)=T(A)$，$T^m(A)=T\left(T^{m-1}(A)\right)$，$m\geq 2$．对于数列 $A:a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 与 $B:b_1$，$b_2$，…，$b_n$，定义 $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$．若数列 $A:a_1$，$a_2$，…，$a_n(n\geq 3)$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，则称数列A为 $\mathfrak{R}_n$ 数列.

（Ⅰ）若 $A:-1,-1,1,-1,1,1$，写出 $T(A)$，并求 $A\cdot T^2(A)$；

（Ⅱ）对于任意给定的正整数 $n(n\geq 3)$，是否存在 $\mathfrak{R}_n$ 数列A，使得 $A\cdot T(A)=n-3$？若存在，写出一个数列A，若不存在，说明理由；

（Ⅲ）若 $\mathfrak{R}_n$ 数列A满足 $T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=n-4(k=1,2,\cdots,n-2)$，求数列 $A$ 的个数.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！