中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 11 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^{*}\,\middle|\,x^{2}-5x\le 0\right\},B=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,|x-1|\le 2\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

2．若复数 $3-\mathrm{i}$ 为方程 $ax^{2}+bx+1=0\,(a,b\in\mathbf{R})$ 的一个根，则该方程的另一个复数根是

A．$3+\mathrm{i}$　　B．$-3-\mathrm{i}$　　C．$-\mathrm{i}+3$　　D．$-3+\mathrm{i}$

3．在 $\left(3-\sqrt{x}\right)^{7}$ 的展开式中，x^{3} 的系数为

A．-21　　B．21　　C．189　　D．-189

4．上、下底面均为等边三角形的三棱台的所有顶点都在同一球面上，若三棱台的高为 3，上、下底面边长分别为 $\sqrt{15},2\sqrt{6}$，则该球的表面积为

A．32π　　B．36π　　C．40π　　D．42π

5．若 $\dfrac{9\pi}{16}<\alpha<\dfrac{17\pi}{16}$，且满足 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{8}\right)=-\dfrac{1}{4}$，则 $\sin\left(\dfrac{9\pi}{16}-\alpha\right)=$

A．$-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

6．已知点 A 为抛物线 $C:x^{2}=8y$ 上的动点，点 B 为圆 $(x-6)^{2}+(y+6)^{2}=9$ 上的动点，设点 A 到 x 轴的距离为 d，则 $|AB|+d$ 的最小值为

A．4　　B．5　　C．7　　D．10

7．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{a-x}+\dfrac{x^{2}}{2}+4x-\ln(x+4)+\mathrm{e}^{x-a+2\ln\frac{15}{4}}$ 存在零点，则实数 a 的值为

A．-2　　B．$\ln\dfrac{15}{4}-2$　　C．-3　　D．$\ln\dfrac{15}{4}-3$

8．设 $a=\dfrac{17}{18},b=\cos\dfrac{1}{3},c=3\sin\dfrac{1}{3}$，则下列正确的是

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 5 分，部分选对但不全得 2 分，有错选的得 0 分．

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+k\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象中相邻两条对称轴的距离是 $\dfrac{\pi}{2}$，将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是偶函数，且最大值为 4，则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期是 2π　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{5\pi}{8},-1\right)$ 对称　　D. $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8}\right]$ 上单调递减

10. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4$，且对任意的实数 t，都有 $|\vec{b}+t\vec{a}|\ge|\vec{b}-\vec{a}|$ 恒成立，则下列结论正确的是

A. $4\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直　　B. $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=27$

C. $\left|\lambda\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}\right|+|\lambda\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值为 $\sqrt{21}$　　D. $|\lambda\vec{a}-\vec{b}|-\left|\lambda\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

11. 设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{11}{24},P(\overline{A}B+A\overline{B})=\dfrac{7}{24}$，则下列结论中正确的是

A. $P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{8}$　　B. $P(\overline{A}+B)=\dfrac{5}{6}$

C. $P(A|B)=\dfrac{9}{11}$　　D. $P(\overline{A}|B)=P(\overline{B}|A)$

12. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $S_{2022}<S_{2023}<S_{2021}$，设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则下列结论中正确的是

A. $a_{2022}<0$　　B. 使得 $S_n<0$ 成立的最大的 n 值为 4045

C. $a_{2023}\cdot a_{2024}<a_{2021}\cdot a_{2022}$　　D. 当 $n=2022$ 时，T_n 取得最小值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．求值：$\lg\left(\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}\right)=$________．

14．已知 $a>0,b>0$，且满足 $a+2b=3$，则 $\dfrac{a^2+4}{2a}+\dfrac{2b^2+b+2}{2b+1}$ 的最小值为________．

15．已知 F_1,F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一、二象限的交点分别为 P、Q，若 $|PQ|=4b$，则双曲线的离心率为________．

16．一条沿江公路上有 18 盏路灯，为节约用电，现打算关掉其中 4 盏路灯，为安全起见，要求公路的头尾两盏路灯不可关闭，关掉的相邻两个路灯之间至少有 3 盏亮着的路灯，则不同的方案总数共有________种．

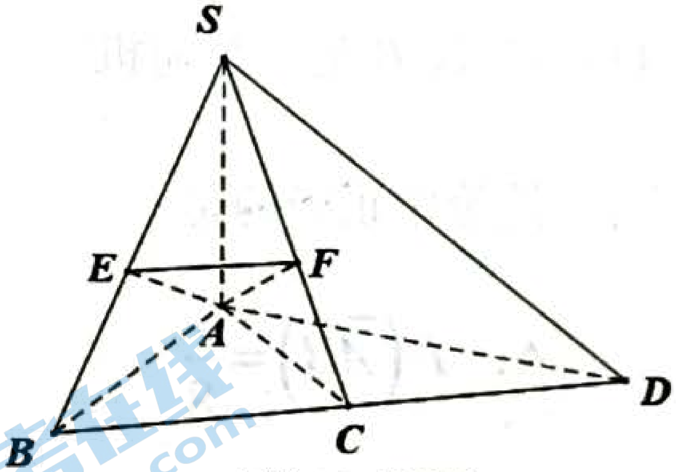
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{2c\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{\cos B}$．

（1）若 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求 $\tan C$ 的值；

（2）若 $a+c=3+3\sqrt{3}$，ΔABC 内切圆的面积为 π，求 ΔABC 的面积．

18．（12 分）三棱锥 $S-ABD$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABD, AB=AC, S_{\Delta SBD}=\sqrt{2}S_{\Delta SBC}$，并且 $\angle BAC$ 是直角．



（第 18 题图）

（1）求二面角 $C-SA-D$ 所成角的余弦值；

（2）若 $\angle SCB=60^\circ$，SB、SC 上各取一点 E、F，设 $\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SF}{SC}=\lambda(0<\lambda<1)$．当 λ 为何值时，平面 $AEF\perp$ 平面 SBC．

19．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，且 $2a_{n+1}=a_n+2, S_n$ 为其前 n 项的和．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求满足不等式 $\left|S_n-2n-6\right|<\dfrac{1}{2023}$ 的最小正整数 n 的值；

（3）设 $b_m=(m-3)^2+\lambda^2, C_n=n\lambda\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{a_n-2}{3}\right)$，其中 $\lambda>0$，若对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$，总有 $b_m-C_n>\dfrac{7}{3}$ 成立，求 λ 的取值范围．

20.（12 分）新冠疫情下，为了应对新冠病毒极强的传染性，每个人出门做好口罩防护工作刻不容缓．某口罩加工厂加工口罩由 A,B,C 三道工序组成，每道工序之间相互独立，且每道工序加工质量分为高和低两种层次级别，A,B,C 三道工序加工的质量层次决定口罩的过滤等级；A,B,C 工序加工质量层次均为高时，口罩过滤等级为 100 等级（表示最低过滤效率为 99.97%）；C 工序的加工质量层次为高，A,B 工序至少有一个质量层次为低时，口罩过滤等级为 99 等级（表示最低过滤效率为 99%）；其余均为 95 级（表示最低过滤效率为 95%）．

表①：表示 A,B,C 三道工序加工质量层次为高的概率；表②：表示加工一个口罩的利润．

表①

工序	A	B	C
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

表②

口罩等级	100 等级	99 等级	95 等级
利润/元	2.3	0.8	0.5

（1）X 表示一个口罩的利润，求 X 的分布列和数学期望；

（2）由于工厂中 A 工序加工质量层次为高的概率较低，工厂计划通过增加检测环节对 A 工序进行升级．在升级过程中，每个口罩检测成本增加了 $a\left(0\le a\le 0.4\right)$ 元时，相应的 A 工序加工层次为高的概率在原来的基础上增加了 b；试问：若工厂升级方案后对一个口罩利润的期望有所提高，则 a 与 b 应该满足怎样的关系？

21.（12 分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，离心率 $\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过点 F_2 作不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A,B 两点，且 ΔABF_1 的周长为 $4\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设点 A 关于 x 轴的对称点为 C，求 ΔF_1BC 的面积的最大值.

22.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-x\right)\ln\left(\left|x\right|-1\right)$.

（1）当函数 $y=f\left(x\right)-ax$ 有 3 个零点，求实数 a 的取值范围；

（2）当 a 取条件（1）下的取值时，设函数 $y=f\left(x\right)-a$ 有 3 个零点 x_1,x_2,x_3，证明：

$$x_1+x_2+x_3>\frac{2}{\mathrm{e}}.$$