北京市第十三中学 2023～2024 学年第一学期

高三数学期中测试

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第1 页至第2页；第Ⅱ卷第3页至第6页，答题纸第1 页至第3 页. 共150分，考试时间120分钟.请在答题纸上侧密封线内书写班级、姓名、准考证号. 考试结束后，将本试卷的答题纸交回.

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{1\}$　（B）$\{0,1\}$　（C）$\{-1,0,1\}$　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知复数 $\dfrac{a+i}{1+3i},a\in R$ 是纯虚数，则在复平面中，复数 $z=a+i$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点坐标是

（A）$(-3,-1)$　（B）$(-3,1)$　（C）$(1,-3)$　（D）$(1,3)$

（3）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,x)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$，且 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=-1$，则 $x=$

（A）-3　（B）3　（C）-1　（D）1

（4）已知函数 $f(x)=x^2+\ln|x|$，则 $f(x)$

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数　（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数　（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

（5）已知 $(2x+\dfrac{a}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为80，则 $a=$

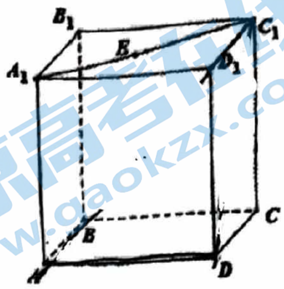
（A）-1　（B）±1　（C）±2　（D）2

（6）直线 $y=kx+2$ 与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 M,N 两点，若 $|MN|\geq 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是

（A）$[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}]$　（B）$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{4}]\cup[\dfrac{\sqrt{2}}{4},+\infty)$

（C）$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$　（D）$(-\infty,-\dfrac{1}{3}]\cup[\dfrac{1}{3},+\infty)$

(7) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 A_1C_1 上任意一点，则 $\sin\angle AED$ 的值不可能是



(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

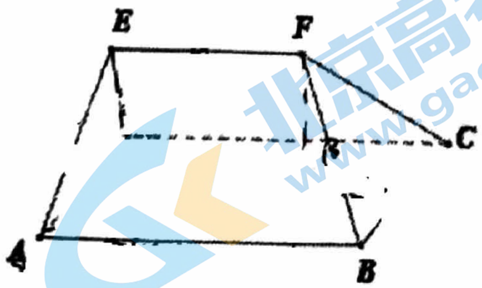
(8) 设 α,β 均为第一象限角，则“$\alpha>\beta$”是“$\sin\alpha>\sin\beta$”的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(9) 随着北京中轴线申遗工作的进行，古建筑备受关注. 故宫不仅是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑之一，更是北京中轴线的“中心”. 图 1 是古建筑之首的太和殿，它的重檐庑（wǔ）殿顶可近似看作图 2 所示的几何体，其中底面 $ABCD$ 是矩形，$\frac{BC}{AB}=\frac{5}{9}$，$EF//AB$，四边形 $ABFE$、$CDEF$ 是两个全等的等腰梯形，ΔEAD、ΔFBC 是两个全等的等腰三角形. 若 $BC=5, EF=6, AE=\frac{13}{2}$，则该几何体的体积为

(图 1)



(图 2)

(A) 90　　(B) $30\sqrt{15}$　　(C) $\frac{75\sqrt{15}}{2}$　　(D) 135

(10) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 π，集合 $S=\{\sin a_n \mid n\in N^*\}$，若 $S=\{a,b\}$，则 $a+b=$

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

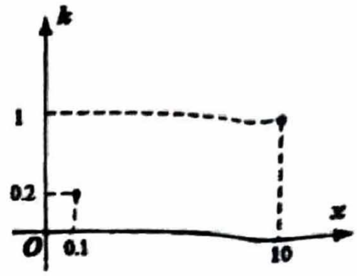
二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）直线 $\sqrt{3}x+y-1=0$ 的倾斜角是________.

（12）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}=a_n+2$，$a_1=5$，则 $a_2+a_4=$____；$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$____.

（13）近年来，踩踏事件时有发生，给人们的生命财产安全造成了巨大损失. 在人员密集区域，人员疏散是控制事故的关键，而能见度 x（单位：米）是影响疏散的重要因素. 在特定条件下，疏散的影响程度 k 与能见度 x 满足函数关系：

$$k=\begin{cases}0.2, & x<0.1,\\ ax^b+1.4, & 0.1\leqslant x\leqslant 10,\ (a,b\ 是常数)\\ 1, & x>10,\end{cases}$$



如图记录了两次实验的数据，则根据上述函数模型和所得实验数据可得 $b=$______.

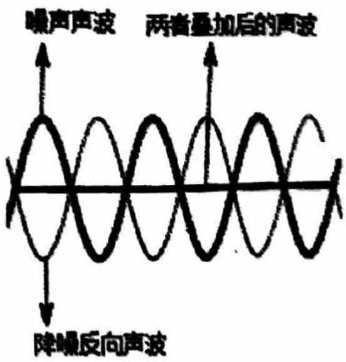
（参考数据：$\lg 3\approx 0.48$）

（14）在平面直角坐标系 $O-xy$ 中，若 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$C(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

则满足 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 的一个 β 的值可以是______.

（15）科技的发展改变了世界，造福了人类，我们生活中处处享受着科技带来的“红利”. 例如主动降噪耳机让我们在嘈杂的环境中享受一丝宁静，它的工作原理是：先通过微型麦克风采集周围的噪声，然后降噪芯片生成与噪声振幅相同的反相位声波来抵消噪声（如图所示）. 已知某噪声的声波曲线 $f(x)=2\sin(\frac{2\pi}{3}x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，且经过点 $(1,2)$.

下述四个结论：



①函数 $f(x+\frac{1}{4})$ 是奇函数；

②函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减；

③存在正整数 n，使得 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)>2$；

④对于任意实数 x，存在常数 m 使得 $f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)=m$.

其中所有正确结论的编号是__________.

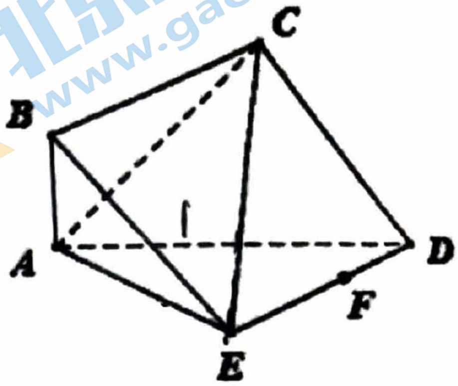
三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

（16）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 ADE，$AC=CD=AE=DE=\sqrt{2}$，$AD=2$，点 F 为 DE 的中点.

（Ⅰ）证明 $CF\,//$ 平面 ABE；

（Ⅱ）求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.



（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin\omega x$，$g(x)=\sqrt{3}\cos\omega x$（$\omega>0$），$h(x)=3\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x$. 在下列关于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的三个条件中选择一个作为已知，使函数 $h(x)$ 唯一确定，并求解下列问题.

（Ⅰ）求函数 $h(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若对于 $\forall x\in R$，存在唯一的 $a\in[0,m]$，使得 $h(a-x)=h(a+x)$，求 m 的取值范围.

条件①：两函数图像在 $[0,2\pi]$ 内有且仅有两个交点；

条件②：两函数图像的相邻两交点的水平距离为 π；

条件③：两函数图像最高点间的最小水平距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

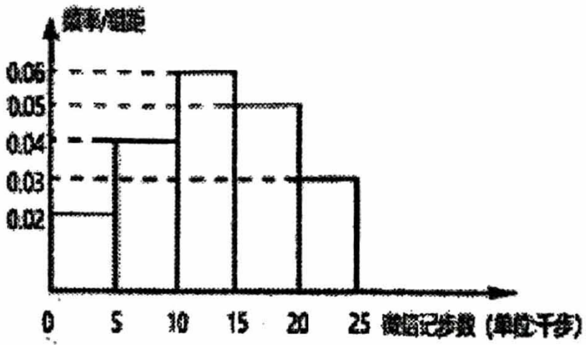
注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

某校工会开展健步走活动，要求教职工上传 3 月 1 日至 3 月 7 日微信记步数信息，下图是职工甲和职工乙微信记步数情况：

职工甲

职工乙



（Ⅰ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选一天，求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000 的概率；

（Ⅱ）从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天，记职工乙在这两天中微信记步数不低于 10000 的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）如图是校工会根据 3 月 1 日至 3 月 7 日某一天的数据，制作的全校 200 名教职工微信记步数的频率分布直方图．已知这一天甲和乙微信记步数在单位 200 名教职工中排名分别为第 68 和第 142，请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,0)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+\sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点. 若直线 $x=3$ 上存在点 P，使得四边形 $PAMN$ 是平行四边形，求 k 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的零点个数；

（Ⅲ）若对于任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$ax^2-x\sin x-\cos x+a\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 3)$ 中的每一项都不大于 n 的正整数. 对于满足 $1\leq m\leq n$ 的整数 m，令集合 $A(m)=\{k\mid a_k=m,k=1,2,\cdots,n\}$. 记集合 $A(m)$ 中元素的个数为 $s(m)$（约定空集的元素个数为 0）.

（Ⅰ）若 $A:6,3,2,5,3,7,5,5$，求 $A(5)$ 和 $s(5)$；

（Ⅱ）若 $\frac{1}{s(a_1)}+\frac{1}{s(a_2)}+\cdots+\frac{1}{s(a_n)}=n$，求证：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同；

（Ⅲ）已知 $a_1=a,a_2=b$，若对任意的正整数 $i,j(i\neq j,i+j\leq n)$ 都有 $i+j\in A(a_i)$ 或 $i+j\in A(a_j)$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的值.

北京市第十三中学 2023～2024 学年第一学期

高三数学期中测试参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	C	A	B	D	B	A	C	D	B	B

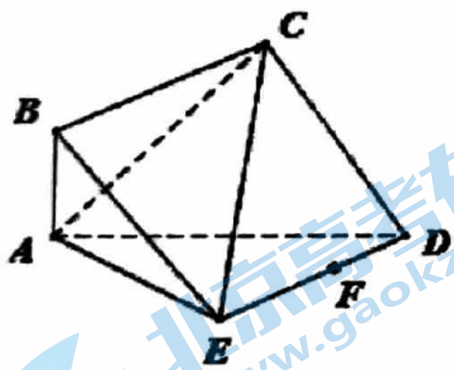
二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

(11) $\frac{2\pi}{3}$；　(12) 10，n^2；　(13) -0.48；

(14) $\beta=2k\pi,k\in Z$ 或 $\beta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$.　(15) ①②④

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

(16)（本小题 13 分）



解：（Ⅰ）证明：取 AD 的中点为 O，连接 OC,OF.

因为 $AC=CD$，所以 $CO\perp AD$.

因为 $AB\perp$ 平面 ADE，所以 $AB//CO$，

因为点 F 为 DE 的中点.，所以 $AE//OF$.

因为 $AB,AE\subset$ 平面 ABE，且 $AB\cap AE=A$，

$OC,OF\subset$ 平面 COF，且 $OC\cap OF=O$，

所以平面 $ABE//$ 平面 COF.

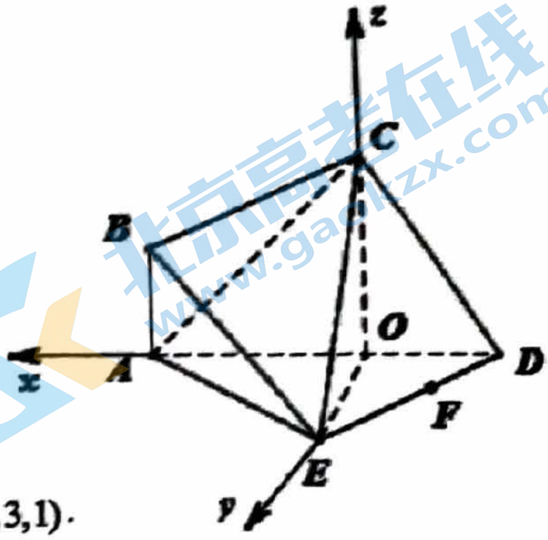
又因为 $CF\subset$ 平面 COF，所以 $CF//$ 平面 ABE.

（Ⅱ）由题意及（Ⅰ）可知，$OE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 OA,OE,OC 两两互相垂直，

故建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

由题意可知 $A(1,0,0)$，$E(0,1,0)$，$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$C(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AF}=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0),\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$.



显然 $\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$ 是平面 AEF 的一个法向量.

假设平面 ACF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ -x+z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,3,1)$.

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{OC}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\vec{n}|\times|\overrightarrow{OC}|}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}$，

由图可知二面角 $E-AF-C$ 为钝角，故所求二面角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{11}}{11}$.

（17）（本小题 13 分）

解： 选条件①：函数 $h(x)$ 不确定.

选条件②：

（法一）因为 $\sin\omega x=\sqrt{3}\cos\omega x$，所以 $\tan\omega x=\sqrt{3}$，

所以 $\omega x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{\pi}{3\omega}+\frac{k\pi}{\omega},k\in Z$，

假设两个相邻的交点分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$.

所以由题意可知 $x_2-x_1=\frac{\pi}{\omega}=\pi$，故 $\omega=1$.

（法二）因为 $\sin\omega x=\sqrt{3}\cos\omega x$，所以 $2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})=0$，

所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{\pi}{3\omega}+\frac{k\pi}{\omega},k\in Z$，

假设两个相邻的交点分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$.

所以由题意可知 $x_2-x_1=\frac{\pi}{\omega}=\pi$，故 $\omega=1$.

选条件③：

由题意可知，两函数图像最高点 $A(x_1,1),B(x_2,1)$ 应该满足如下关系：

$$\begin{cases}\omega x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k_1\pi,k_1\in Z\\ \omega x_2=\dfrac{\pi}{2}+2k_2\pi,k_2\in Z\end{cases}$$

所以两函数图像最高点间的距离为 $|\omega x_1-\omega x_2|=\omega|x_1-x_2|=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z^*$

又因为两函数图像最高点间的最小距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\omega=1$.

（Ⅰ）由 $\omega=1$ 可知 $h(x)=3\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=3\times\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$$=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{3}{2}.$$

（Ⅱ）因为对于 $\forall x\in R$,存在唯一的 $a\in[0,m]$，使得 $h(a-x)=h(a+x)$，

所以函数 $h(x)$ 图像的对称轴有且仅有一条落在区间 $[0,m]$ 上.

因为 $x\in[0,m]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}+2m]$，

因为 $h(x)$ 图像的对称轴有且仅有一条落在区间 $[0,m]$ 上，

所以 $\dfrac{\pi}{2}\le 2m+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{2}$，即 $\dfrac{\pi}{12}\le m<\dfrac{7\pi}{12}$，

故 m 的取值范围为 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12})$.

(18)（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设"职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000"为事件 A………1 分

从 3 月 1 日至 3 月 7 日这七天中，3 月 2 日，3 月 5 日，3 月 7 日这三天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000，所以 $P(A)=\frac{3}{7}$.

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$，$(X=1)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\frac{4}{7}$，$(X=2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$.

（Ⅲ）3 月 3 日

解析：由直方图知，微信记步数落在 $[20,25]$，$[15,20),[10,15),[5,10),[0,5)$（单位：千步）区间内的人数依次为 $200\times0.15=30$，$200\times0.25=50$，$200\times0.3=60$，$200\times0.2=40$，$200\times0.1=20$ 据折线图知，这只有 3 月 2 日、3 月 3 日和 3 月 7 日；而由乙微信记步数排名第 142，可知当天乙微信记步数在 5000---10000 之间，根据折线图知，这只有 3 月 3 日和 3 月 6 日．所以只有 3 月 3 日符合要求．

(19)（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $a=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$.

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=1$，

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）若四边形 $PAMN$ 是平行四边形，

则 $PA//MN$，且 $|PA|=|MN|$.

所以 直线 PA 的方程为 $y=k(x-2)$，

所以 $P(3,k)$，$|PA|=\sqrt{k^2+1}$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx+\sqrt{3}, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8\sqrt{3}kx+8=0$，

由 $\Delta>0$，得 $k^2>\frac{1}{2}$.

且 $x_1+x_2=-\frac{8\sqrt{3}k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8}{4k^2+1}$.

所以 $|MN|=\sqrt{(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

$$=\sqrt{(k^2+1)\frac{64k^2-32}{(4k^2+1)^2}}.$$

因为 $|PA|=|MN|$，所以 $\sqrt{(k^2+1)\frac{64k^2-32}{(4k^2+1)^2}}=\sqrt{k^2+1}$.

整理得 $16k^4-56k^2+33=0$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.

经检验均符合 $\Delta>0$，但 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时不满足 $PAMN$ 是平行四边形，舍去.

所以 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.

(20)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)因为 $f(0)=-1$，所以切点为 $(0,-1)$，

因为 $f'(x)=2x-x\cos x, x\in R$，

所以 $f'(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $f'(x)=2x-x\cos x=x(2-\cos x)$，

因为 $\cos x\in[-1,1]$，所以 $2-\cos x>0$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

又因为 $f(0)=-1<0$，$f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}>0$，

所以，由零点存在定理可知，存在唯一的 $x_1\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 使得 $f(x_1)=0$，存在唯一的 $x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $f(x_2)=0$.

故函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

(Ⅲ)由(Ⅱ)可知，$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x\geq f(0)=-1$，

即 $x^2+1-x\sin x-\cos x\geq 0$ 恒成立，即 $x^2+1\geq x\sin x\cos x$ 恒成立.

所以当 $a\geq 1$ 时，$ax^2-x\sin x-\cos x+a\geq 0$ 恒成立，

下证当 $a<1$ 时，存在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使得 $ax^2-x\sin x-\cos x+a<0$.

令 $g(x)=ax^2-x\sin x-\cos x+a, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

因为 $g(0)=a-1<0$，

故当 $a<1$ 时，对于任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$ax^2-x\sin x-\cos x+a\geq 0$ 不恒成立.

故 $a\in[1,+\infty)$.

(21)（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题设知 $A(5)=\{4,7,8\}$，$s(5)=3$． ………………4 分

（Ⅱ）依题意 $s(a_i)\geq 1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $\frac{1}{s(a_i)}\leq 1$．因此 $\frac{1}{s(a_1)}+\frac{1}{s(a_2)}+\cdots+\frac{1}{s(a_n)}\leq n$．

又因为 $\frac{1}{s(a_1)}+\frac{1}{s(a_2)}+\cdots+\frac{1}{s(a_n)}=n$，所以 $s(a_i)=1$．

所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同． ………………9 分

(Ⅲ) 依题意 $a_1=a,a_2=b$.

由 $i+j\in A(a_i)$ 或 $i+j\in A(a_j)$，知 $a_{i+j}=a_i$ 或 $a_{i+j}=a_j$．

令 $j=1$，可得 $a_{i+1}=a_i$ 或 $a_{i+1}=a_1$，对于 $i=2,3,\ldots,n-1$ 成立，故 $a_3=a_2$ 或 $a_3=a_1$．

①当 $a=b$ 时，$a_3=a_4=\cdots=a_n=a$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=na$．

②当 $a\neq b$ 时，$a_3=a$ 或 $a_3=b$．

当 $a_3=a$ 时，由 $a_4=a_3$ 或 $a_4=a_1$，有 $a_4=a$，同理 $a_5=a_6=\cdots=a_n=a$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=(n-1)a+b$．

当 $a_3=b$ 时，此时有 $a_2=a_3=b$，

令 $i=1$，$j=3$，可得 $4\in A(a)$ 或 $4\in A(b)$，即 $a_4=a$ 或 $a_4=b$．

令 $i=1$，$j=4$，可得 $5\in A(a)$ 或 $5\in A(b)$．令 $i=2$，$j=3$，可得 $5\in A(b)$．

所以 $a_5=b$．

若 $a_4=a$，则令 $i=1, j=4$，可得 $a_3=a$，与 $a_3=b$ 矛盾.

所以有 $a_4=b$. 不妨设 $a_2=a_3=\cdots=a_k=b(k\geq 5)$，

令 $i=t, j=k+1-t(t=2,3,\cdots,k-1)$，可得 $k+1\in A(b)$，因此 $a_{k+1}=b$.

令 $i=1, j=k$，则 $a_{k+1}=a$ 或 $a_{k+1}=b$. 故 $a_{k+1}=b$.

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=(n-1)b+a$.

综上，$a=b$ 时，$a_1+a_2+\cdots+a_n=na$.

$a_3=a\neq b$ 时，$a_1+a_2+\cdots+a_n=(n-1)a+b$.

$a_3=b\neq a$ 时，$a_1+a_2+\cdots+a_n=(n-1)b+a$. ………………15 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！