人大附中 2020-2021 学年度高三 10 月统一练习

数学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

01. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}, B=\{x\in N\mid x<1\}$，则 $A\cap B=$ 【　　】

$A.\{-1,0\}$　　$B.\{0,1\}$

$C.\{0\}$　　$D.\varnothing$

02. 已知命题 P：$\exists x\in(0,+\infty), \ln x+x<0$，则 $\neg P$ 为 【　　】

$A.\forall x\in(0,+\infty), \ln x+x<0$　　$B.\exists x\notin(0,+\infty), \ln x+x\geq 0$

$C.\forall x\in(0,+\infty), \ln x+x\geq 0$　　$D.\forall x\notin(0,+\infty), \ln x+x\geq 0$

03. 已知点 $P(2\cos\dfrac{5\pi}{6},1)$ 是角 α 终边上一点，则 $\sin\alpha=$ 【　　】

$A.\dfrac{1}{2}$　　$B.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$C.-\dfrac{1}{2}$　　$D.-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

04. 已知向量 $a=(1,1), b=(2,-1)$，若 $(\lambda a+2b)\ /\!/\ (a-b)$，则实数 $\lambda=$ 【　　】

$A.8$　　$B.-8$

$C.2$　　$D.-2$

05. 以下选项中，满足 $\log_a 2>\log_b 2$ 的是 【　　】

$A.\ a=2, b=4$　　$B.\ a=8, b=4$

$C.\ a=\dfrac{1}{4}, b=8$　　$D.\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{4}$

06. 下列函数中，既是奇函数又在区间(-1，1)内是增函数的是 【　　】

$A.\ f(x)=x^3-3x$　　$B.\ f(x)=\sin x$

$C.\ f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　$D.\ f(x)=e^x+e^{-x}$

07. 已知方程 $x^2+ax-1=0$ 在区间 $[0,1]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是 【　　】

$A.\ [0,+\infty)$　　$B.(-\infty,0]$

$C.(-\infty,-2]$　　$D.[-2,0]$

08. 已知a是非零向量，m为实数，则"$|a|=m$"是"$a^2=m^2$"的 【 】

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

09. 已知$a>0$，若函数$f(x)=\begin{cases}ax^3-x,x\le 1\\ a^{x-1}-1,x>1\end{cases}$有最小值，则实数$a$的取值范围是 【 】

A.$(1,+\infty)$　　B.$[1,+\infty)$

C.$(\frac{1}{2},+\infty)$　　D.$[\frac{1}{2},+\infty)$

10. 定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：当$0\le x\le\pi$时，$f(x)=\sin x$；当$x\ge\pi$时，$f(x)=2f(x-\pi)$.

若方程$f(x)-x+m=0$在区间$[0,5\pi]$上恰有3个不同的实根，则m的所有可能取值集合是【 】

A.$[0,\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})$　　B.$(0,\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})$

C.$[0,\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})\cup[3\pi,4\pi)$　　D.$[0,\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3})\cup(3\pi,4\pi)$

二、填空题共5小题每小题5分，共25分。请将答案全部填写在答题卡上。

11. 已知$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha=$_______.

12. 在ΔABC中，已知$a=2$，$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则$\Delta ABC$的面积为_______.

13. 已知点$P(1,1)$，O为标原点，点A、B分别在x轴和y轴上，且满足$PA\perp PB$，则$(\overline{PA}+\overline{PB})\cdot\overline{PO}=$

_______，$|\overline{PA}+\overline{PB}|$的最小值为_______.

14. 已知函数$f(x)=e^x+a(1-x)$，若$f(x)\ge 0$恒成立，则实数a的取值范围是__________.

15. 将函数$y=\sin x$图象上各点横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}(\omega>0)$倍，再向左平移$\frac{\pi}{5}$个单位，得到函数$f(x)$的图象，已知$f(x)$在$[0,2\pi]$上有且只有5个零点.在下列命题中:

① $f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{5},0)$对称;

② $f(x)$在$(0,2\pi)$内恰有5个极值点;

③ $f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{5})$内单调递减;

④ ω的取值范围是$[\frac{25}{11},\frac{30}{11})$，

所有真命题的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程，每小题均包含 1 分的卷面分，请注意答题卡卷面的工整和整洁。

16. (本题 13 分)

在 ΔABC 中，已知 $a+2b=2c\cos A$.

(1)求 C;

(2)若 $a=5$，$c=7$，求 b.

17. (本题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+\sin\omega x(\omega>0)$，若_______，写出 $f(x)$ 的最小正周期，并求函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 内的最小值.

请从① $\omega=1$，② $\omega=2$ 这两个条件中选择一个，补充在上面的问题中并作答.若选择多个条件分别作答，按第一个判分.

18. (本题 14 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$g(x)=x-1$.求正实数 a 的取值范围；

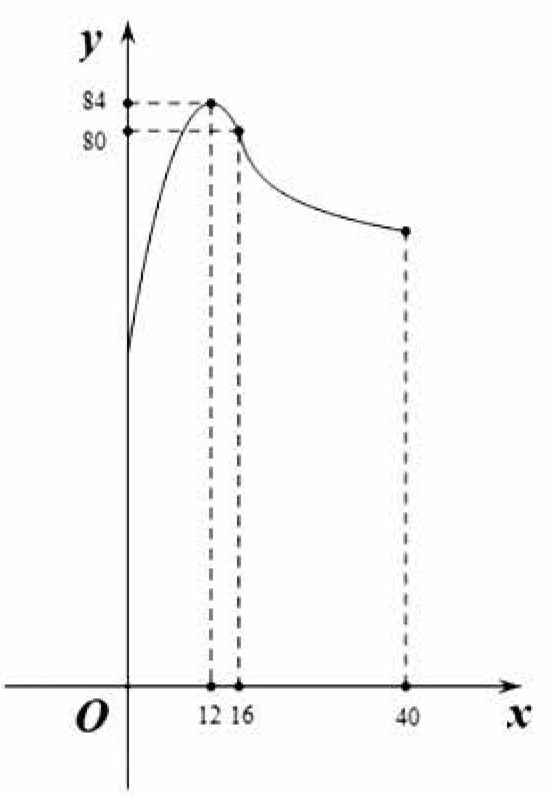
(1)任意 $x_1\in(0,a)$，存在 $x_2\in(0,a)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立；

(2)存在 $x_1,x_2\in[a,a+1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立.

19. (本题 15 分)

研究表明:在一节 40 分钟的数学课中，学生的注意力指数 $f(x)$ 与听课时间 x(单位：分钟)之间的变化曲线如图所示.

当 $x\in(0,16]$ 时，曲线是二次函数图象的一部分；当 $x\in[16,40]$ 时，曲线是函数 $y=\log_{0.8}(x+a)+80$ 图象的一部分.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)如果学生的注意力指数低于 75，称为“欠佳听课状态”，则在一节 40 分钟的数学课中，学生处于“欠佳听课状态”所持续的时间有多长？(精确到 1 分钟，参考数据：$4^5=1024,5^5=3125$.)

20. (本题 15 分)

已知函数 $f(x)=(x+a)\ln x-(a+1)(x-1)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)是否存在实数 a，使得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 具有单调性?若存在，求所有 a 的取值构成的集合；若不存在，请说明理由.

21. (本题 15 分)

对非空数集 A， B，定义 $A-B=\{x-y\mid x\in A,y\in B\}$，记有限集 T 的元素个数为$|T|$.

(1)若 $A=\{1,3,5\},B=\{1,2,4\}$，求 $|A-A|,|B-B|,|A-B|$.

(2)若 $|A|=4,A\subseteq N^{*},B=\{1,2,3,4\}$，当 $|A-B|$ 最大时，求 A 中最大元素的最小值.

(3)若 $|A|=|B|=5,|A-A|=|B-B|=21$,求 $|A-B|$ 的最小值.

人大附中2020-2021学年度高三10月统一练习

数学参考答案

2020.10.6

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.

1.C	2.C	3.A	4.D	5.A	6.B	7.A	8.A	9.B	10.D

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. $-\dfrac{1}{3}$　　12. $\sqrt{3}$　　13. 2，$\sqrt{2}$

14. $\left[0，e^2\right]$　　15. ①④

三、解答题共6小题，共85分．每小题均包含1分的卷面分.

16. (本题13分)

解：(Ⅰ) 法1：因为 $a+2b=2c\cos A$，

由正弦定理，得 $\sin A+2\sin B=2\sin C\cos A$， ……………………2分

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以，$\sin A+2\sin A\cos C+2\cos A\sin C=2\sin C\cos A$，

整理得：$\sin A\cdot(1+2\cos C)=0$． ……………………4分

又 $A,B,C\in(0,\pi)$，故 $\sin A>0$，

所以 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$． ……………………7分

法2：因为 $a+2b=2c\cos A$，

由余弦定理，知 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

所以 $a+2b=2c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， ……………………2分

整理得：$a^2+b^2-c^2=-ab$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$． ……………………5分

又 $A,B,C\in(0,\pi)$，

所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$． ……………………7分

（Ⅱ）法 1：由正弦定理，知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

即：$\frac{5}{\sin A}=\frac{7}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，

所以，$\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{14}$．……………………………………………………8 分

因为 C 为钝角，所以 $\cos A=\frac{11}{14}$，……………………………………9 分

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times(-\frac{1}{2})+\frac{11}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}．$$ ……………………………11 分

由正弦定理，得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$．……………………………12 分

法 2：由余弦定理，知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即：$49=25+b^2-10b\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，……………………………………10 分

整理得：$b^2+5b-24=0$，

解得：$b=3$ 或 -8（舍）．……………………………………………12 分

17．(本题 13 分)

解：选择①：

$f(x)=2\cos^2 x+\sin x$，最小正周期为 2π．……………………………4 分

令 $t=\sin x$，则 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，………………………………………6 分

$f(x)=2(1-t^2)+t=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$，……………………………9 分

由于上述关于 t 的二次函数在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

因此，当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 1．……………………12 分

选择②：

$f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$，最小正周期为π． ······························4 分

因为$f(x)=1+\cos 2x+\sin 2x$ ······································6 分

$=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+1$， ··8 分

当$x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$时，$2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{23\pi}{12}\right]$， ······························9 分

又函数$y=\sin x$在$\left(\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{23\pi}{12}\right]$上单调递增，

所以，当$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$，即$x=\dfrac{5\pi}{8}$时，

$f(x)$取得最小值$1-\sqrt{2}$． ··12 分

18．(本题 14 分)

解：（Ⅰ）因为$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递减，

所以$x_1\in(0,a)$时，$f(x_1)\in(\dfrac{1}{a+1},1)$． ··························1 分

因为$g(x)$在区间$(0,+\infty)$内单调递增，

所以$x_2\in(0,a)$时，$g(x_2)\in(-1,a-1)$． ····························2 分

依题意，$(\dfrac{1}{a+1},1)\subseteq(-1,a-1)$，

所以$-1\le\dfrac{1}{a+1}<1\le a-1$． ···5 分

因为$a>0$，所以$a\ge 2$，

即正实数a的取值范围为$[2,+\infty)$． ································7 分

（Ⅱ）当x_1，$x_2\in[a,a+1]$（$a>0$）时，

$f(x_1)\in\left[\dfrac{1}{a+2},\dfrac{1}{a+1}\right]$，$g(x_2)\in[a-1,a]$． ··························9 分

依题意，$\dfrac{1}{a+2}<a$．

因为$a>0$，所以$a>\sqrt{2}-1$，

即正实数a的取值范围为$(\sqrt{2}-1,+\infty)$． ···························13 分

19．(本题 15 分)

解：（Ⅰ）当$x\in(0,16]$时，设$f(x)=b(x-12)^2+84\ (b<0)$，

因为$f(16)=b(16-12)^2+84=80$，

所以$b=-\dfrac{1}{4}$，故$f(x)=-\dfrac{1}{4}(x-12)^2+84$． ………………………3 分

当$x\in[16,40]$时，$f(x)=\log_{0.8}(x+a)+80$，

由$f(16)=\log_{0.8}(16+a)+80=80$，

解得$a=-15$，故$f(x)=\log_{0.8}(x-15)+80$． ……………………5 分

所以$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}(x-12)^2+84, & x\in(0,16],\\ \log_{0.8}(x-15)+80, & x\in(16,40].\end{cases}$ ……………………6 分

（Ⅱ）当$x\in(0,16]$时，令$f(x)=-\dfrac{1}{4}(x-12)^2+84<75$．

解得，$x\in(0,6)$． ………………………………………………9 分

当$x\in[16,40]$时，令$f(x)=\log_{0.8}(x-15)+80<75$，

所以$x-15>0.8^{-5}=\dfrac{5^5}{4^5}=\dfrac{3125}{1024}\approx 3$．

所以$x\in(18,40]$． ………………………………………………12 分

因此，在一节40分钟的数学课中，学生处于“欠佳听课状态”所持续的时间有

$(6-0)+(40-18)=28$分钟． ……………………………………14 分

20．(本题 15 分)

解：（Ⅰ）因为$f(x)=(x+a)\ln x-(a+1)(x-1)$，

所以$f(1)=0$， ………………………………………………………1 分

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x+a}{x}-(a+1)=\ln x+\dfrac{a}{x}-a$． ……………………3分

所以$f'(1)=0$． ………………………………………………………4 分

所以所求切线方程为$y=0$． ……………………………………5分

（Ⅱ）令$g(x)=f'(x)\ (x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$． ……6 分

（1）当$a\le 0$时，$g'(x)>0$．

所以$g(x)=f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增． …………………………7 分

又因为 $f'(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增．………8 分

（2）当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$， 得 $x=a$．

$x,g'(x),g(x)$ 的变化情况列表如下：

x	$(0,\ a)$	a	$(a,\ +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)=f'(x)$	↘	$f'(a)$	↗

①当 $a=1$ 时， $f'(x)\geq f'(1)=0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）．

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调递增，具有单调性．

②当 $0<a<1$ 时， $x,f'(x),f(x)$ 的变化情况列表如下：

x	$(a,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

所以 $f(x)$ 在 $(a,\ 1)$ 内单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 内单调递增．

③当 $a>1$ 时， $x,f'(x),f(x)$ 的变化情况列表如下：

x	$(0,\ 1)$	1	$(1,a)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 内单调递减，在 $(1,a)$ 内单调递增．··13 分

综上所述，存在实数 a 使得 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 具有单调性，所有 a 的取值所构成

的集合为 $\{1\}$．…………………………………………………………14 分

21．(本题 15 分)

解：（Ⅰ）因为 $A=\{1,3,5\}$， $B=\{1,2,4\}$，

所以 $A-A=\{-4,-2,0,2,4\}$， $A-A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$， $A-B=\{-3,-1,0,1,2,3,4\}$．

所以 $|A-A|=5$， $|B-B|=7$， $|A-B|=7$．　　　　…………………… 6 分

（Ⅱ）设 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}\subseteq\mathbf{N}^*$， $a<b<c<d$．

① 因为 $|A|=|B|=4$，

所以$|A-B|\le 4^2=16$.

当$A=\{1,5,9,13\}$时，因为$B=\{1,2,3,4\}$，

所以$A-B=\{-3,-2,-1,0,1,2,\cdots,11,12\}$，$|A-B|=16$.

所以$|A-B|$最大为16.

② 当$|A-B|=16$时，A中元素与B中元素的差均不相同.

所以$(A-A)\cap(B-B)=\{0\}$.

又因为$B-B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，

所以$b-a$，$c-b$，$d-c\ge 4$.

所以$d-a\ge 12$，$d\ge 13$.

综上，当$|A-B|$最大时，A中最大元素的最小值为13. ……………………10分

（III）对非空数集T，定义运算$T^*=\{x-y|x,\ y\in T,\ x\ne y\}$.

① 因为$|A|=5$，

所以$|A-A|\le 5\times(5-1)+1=21$，当且仅当$|A^*|=5\times(5-1)=20$时取等号.

又因为$|A-A|=21$，

所以A中不同元素的差均不相同.

同理，B中不同元素的差均不相同.

又因为$a-b=a'-b'\Leftrightarrow a-a'=b-b'\Leftrightarrow a'-a=b'-b$，

所以$|A-B|\ge|A|\cdot|B|-\frac{1}{2}\cdot|A^*\cap B^*|\ge 5\times 5-\frac{1}{2}\times 20=15$.

② 令$A=\{1,2,4,8,16\}$，$B=\{-1,-2,-4,-8,-16\}$.

所以$|A|=|B|=5$，A中不同元素的差均不相同，B中不同元素的差均不相同.

所以$|A-A|=|B-B|=21$.

经检验，$|A-B|=15$，符合题意.

综上，$|A-B|$的最小值为15. ……………………14分