本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效

3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足：$z(i+1)+i=1+3i$，则 z 的虚部为

A. $-\frac{i}{2}$　　B. $\frac{i}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2-3x-4<0\}$，$B=\{-2,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B$ 为

A. $\{-1,0,2,3\}$　　B. $\{0,2,3\}$　　C. $\{-2,-1,0\}$　　D. $\{2,3\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，则向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为

A. $(6,-3)$

B. $(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$

C. $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

D. $\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{3}$，$a_2=1$，且 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n-2a_{n-1}+1(n\geq 2)$，则 $a_{2\,023}^2-2a_{2\,022}$ 的值为

A. 2 021　　B. 2 022　　C. 2 023　　D. 2 024

5. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{1}{2}$，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{3}$ 对称，则 ω 的最小值为

A. 3　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{1}{7}$

6. 设 $a=\ln 2$，$b=\frac{2\,023}{2\,022}$，$c=\frac{\ln 2\,023}{\ln 2\,022}$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1,x\leq 1\\ \ln x,x>1\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为

A. [illegible]　　B. 3　　C. 4　　D. 5

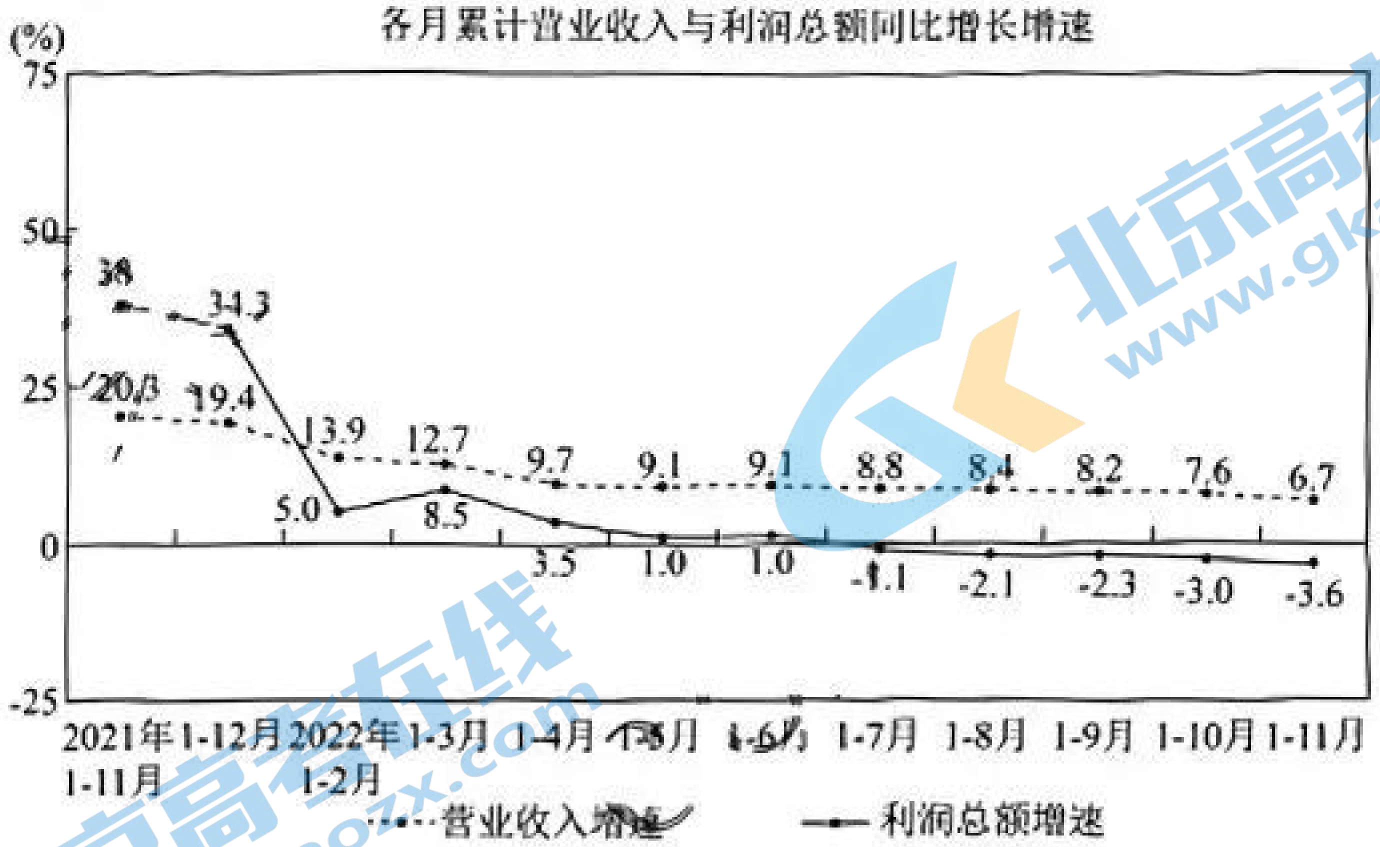
8. 设 P 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上的点，F_1，F_2 分别为 C 的左、右两个焦点，若 $\angle F_1PO=\frac{1}{3}\angle F_1PF_2$（$O$ 为坐标原点），且 $\cos\angle F_1PO=\frac{3}{4}$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{69}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{79}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图为国家统计局于 2022 年 12 月 27 日发布的有关数据，则



A. 营业收入增速的中位数为 9.1%　　　　B. 营业收入增速极差为 13.6%

C. 利润总额增速越来越小　　　　D. 利润总额增速的平均数大于 6%

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 绕点 $P(-2,1)$ 旋转，点 Q 为 C 上的动点(O 为坐标原点)，则

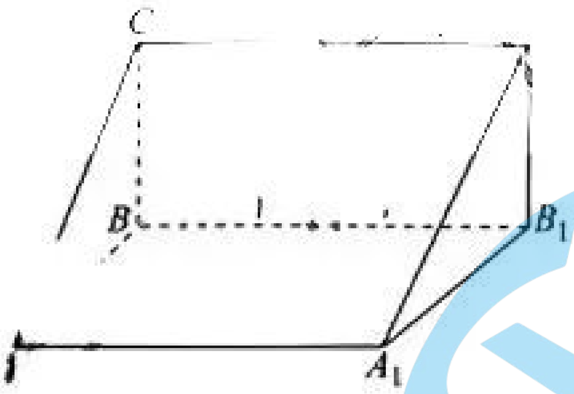
A. 以 Q 为圆心，$|QF|$ 为半径的圆与直线 $x=-1$ 相切

B. 若直线 l 与抛物线有且只有一个公共点，则这样的直线 l 有两条

C. 线段 PF 的垂直平分线方程为 $3x-y+2=0$

D. 过点 F 的直线交 C 于 A，B 两点，若 $|AB|=4$，则这样的直线有 2 条

11. 我国古代数学名著《九章算术》中将"底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱"称为"堑堵". 现有一如图所示的"堑堵"$ABC-A_1B_1C_1$，其中 $AB\perp BC$，若 $BB_1=AB=2$，$BC=1$，则



A. 该"堑堵"的体积为 2

B. 该"堑堵"外接球的表面积为 9π

C. 若点 P 在该"堑堵"上运动，则 $|PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

D. 该"堑堵"中，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，$g(3+2x)$ 为奇函数，则

A. $f'(-1)=0$　　　　B. $g(2\,023)+g(-2\,025)=1$

C. $g(3)=0$　　　　D. $g(2\,023)=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(ax+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数为 30，则实数 a 的值为________.

14. 在某数学活动课上，数学教师把一块三边长分别为 6，8，10 的三角板 ABC 放在直角坐标系中，则△ABC 外接圆的方程可以为________（写出其中一个符合条件的即可）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

15. 已知 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=1$，则 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)$ 的值为________.

16. 拓扑空间中满足一定条件的图象连续的函数 $f(x)$，如果存在点 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，那么我们称函数 $f(x)$ 为"不动点"函数，而称 x_0 为该函数的不动点. 类比给出新定义：若不动点 x_0 满足 $f'(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的双重不动点. 则下列函数中，① $f(x)=x^3-x\sin x$；② $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$；③ $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$ 具有双重不动点的函数为________.（将你认为正确的函数的代号填在横线上）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{1}{2}\sin 2B\cos C+\cos^2 B\sin C-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

(1) 求 B；

(2) 若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，点 D 为 AC 边的中点，证明：$BD=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-9}}{2}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$2S_n+2S_{n-1}=a_n^2-3(n\geq 2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

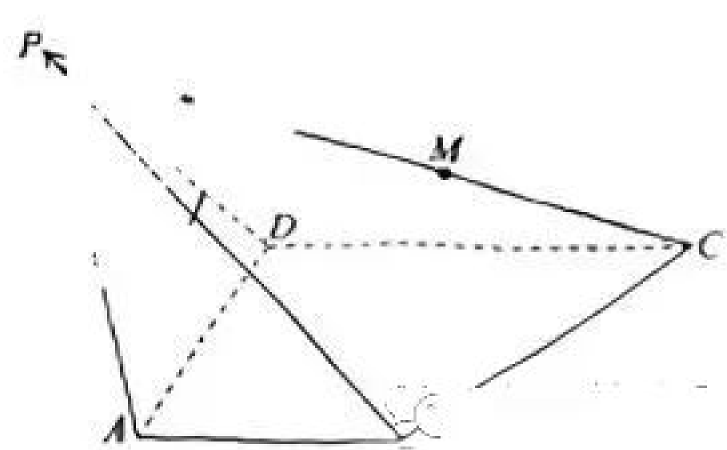
(2) 若 $b_n=$ [illegible]，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/CD$，$AD\perp AB$，$DC=$ [illegible] $=2AB=2a$，$PA=PD$，二面角 $P-AD-B$ 的大小为 135°，点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{a}{2}$.

(1) 过点 P 是否存在直线 l 使直线 $l/\!/$ 平面 $ABCD$，若存在，作出该直线，并写出作法与理由；若不存在，请说明理由.

(2) 若 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$，求点 M 到平面 PAD 的距离.



进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

20.(本小题满分12分)

某商场在促销活动期间，规定凡是在该商场购买500元及以上的顾客可参与抽奖活动，活动规则如下：每个顾客在一个标有1,2,3,4,5,6的均匀圆盘上转动三次，若指针出现一次或两次指向“4”，则该顾客可获得商场返还购买金额的30%；出现三次指向“4”，该顾客可获得商场返还购买金额的50%；否则不返还金额. 某顾客在此商场促销活动期间票据单上总购买金额为800元.

(1)求该顾客参与活动后恰好返还240元的概率；

(2)设该顾客参与活动后，最终支付商场的金额为Y，求Y的分布列与数学期望.(四舍五入取整数)

21.(本小题满分12分)

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$右顶点为$A$，上顶点为$B$，过$A$、$B$两点的直线平分圆$(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$的周长，且与坐标轴围成的三角形的面积为$\sqrt{3}$.

(1)求椭圆E的方程；

(2)若直线$l:y=x+m$与E相交于C、D两点，且点$M(-1,3m)$，当$\triangle CDM$的面积最大时，求直线l的方程.

22.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+2(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)当$a=-1$时，证明：函数$f(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1+x_2>\sqrt{2}$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

2023 届高三年级 3 月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. D 【解析】由条件得 $z=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$，所以 z 的虚部为$\frac{1}{2}$. 故选 D.

2. B 【解析】由 $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x-4)(x+1)<0\}=\{x\in \mathbf{Z}|-1<x<4\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{0,2,3\}$. 故选 B.

3. D 【解析】由题可知 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2,-1)+2(1,3)=(4,5)$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(4,5)\cdot(2,-1)=3$，所以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$. 故选 D.

4. B 【解析】由 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n-2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$得，当 $n\geqslant 2$ 时，$(a_{n+1}^2-2a_n)-(a_n^2-2a_{n-1})=1$，且由 $a_2=\sqrt{3}$，$a_1=1$，得 $a_2^2-2a_1=1$，所以 $\{a_{n+1}^2-2a_n\}$ 构成以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $a_{n+1}^2-2a_n=n$，所以 $a_{2\,023}^2-2a_{2\,022}=2\,022$. 故选 B.

5. C 【解析】由题可知 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以由 $f(T)=\cos(\omega T+\varphi)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(0<\omega)$，又因为函数的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{3}$ 对称，所以 $\frac{7\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=\frac{3k-1}{7},k\in\mathbf{Z}$，又因为 $\omega>0$，所以当 $k=1$ 时，$\omega_{\min}=\frac{2}{7}$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $a=\ln 2<\ln e=1$，$b=\frac{2\,023}{2\,022}>1$，$c=\frac{\ln 2\,023}{\ln 2\,022}>1$，考查函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(e,+\infty)$单调递减，所以 $\frac{\ln 2\,023}{2\,023}<\frac{\ln 2\,022}{2\,022}$，从而得到 $\frac{\ln 2\,023}{\ln 2\,022}<\frac{2\,023}{2\,022}$，所以 $a<c<b$. 故选 B.

7. A 【解析】令 $t=f(x)$，则 $f(t)=1$，当 $t\leqslant 1$ 时，由 $t^2-1=1$，得 $t=-\sqrt{2}$ 或 $t=\sqrt{2}$（舍去），当 $t>1$ 时，由 $\ln t=1$，得 $t=e$，所以 $f(t)=1$ 的两根为 $t_1=-\sqrt{2}$，$t_2=e$，所以得 $f(x)=-\sqrt{2}$ 或 $f(x)=e$. 因为 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=-1$，若 $f(x)=-\sqrt{2}$，易知方程无解，若 $f(x)=e$，则当 $x\leqslant 1$ 时，由 $x^2-1=e$，得 $x=-\sqrt{e+1}$ 或 $x=\sqrt{e+1}$（舍去），此时方程有唯一的解；当 $x>1$ 时，由 $\ln x=e$，得 $x=e^e$，此时方程有唯一的解，综上所述可知 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数有 2 个. 故选 A.

8. C 【解析】因为 $\angle F_1PO=\frac{1}{3}\angle F_1PF_2$，所以设 $\angle F_1PO=\theta$，则 $\angle F_2PO=2\theta$，因为点 O 为 F_1F_2 中点，所以 $S_{\triangle F_1PO}=S_{\triangle F_2PO}$，得 $|PF_1|\sin\theta=|PF_2|\sin 2\theta$，所以 $|PF_1|\sin\theta=2|PF_2|\sin\theta\cos\theta$，因为 $\sin\theta\neq 0$，所以 $|PF_1|=2|PF_2|\cos\theta$，因为 $\cos\theta=\frac{3}{4}$，所以 $2|PF_1|=3|PF_2|$，又由双曲线定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_2|=4a$，$|PF_1|=6a$，因为 $\cos\theta=\frac{3}{4}$，所以 $\cos\angle F_1PF_2=\cos 3\theta=$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

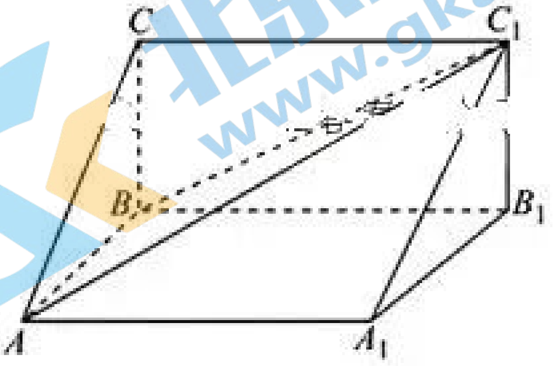
$\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=-\dfrac{9}{16}$，在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得$4c^2=36a^2+16a^2-2\times 6a\times 4a\times\left(-\dfrac{9}{16}\right)$，得$4c^2=79a^2$，得离心率$e=\dfrac{\sqrt{79}}{2}$．故选 C.

二、多选题

9. ABD　【解析】由表中数据易知营业收入增速中位数为 9.1%，故 A 正确；营业收入增速极差为 20.3%－6.7%＝13.6%，故 B 正确；利润总额增速 2022 年 1－3 月累计比 2022 年 1－2 月累计上升，故 C 错误；利润总额增速的平均数为(38.0%＋34.3%－5.0%＋8.5%＋3.5%－1.0%＋1.0%－1.1%－2.1%－2.8%－3.0%－5.6%)÷12＝6.6%，故 D 正确．故选 ABD.

10. AC　【解析】由 $C:y^2=4x$ 可知，C 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，所以对于 A，由抛物线的定义可知以 Q 为圆心，$|QF|$为半径的圆与直线 $x=-1$ 相切，故 A 正确；对于 B，当过点 $P(-2,1)$的直线的斜率不存在时，直线与抛物线无公共点；当直线的斜率存在时，设斜率为 k，则过点 $P(-2,1)$的直线方程为 $l:y=k(x+2)+1$，当 $k=0$ 时，直线 $l:y=1$ 与抛物线有且只有一个公共点，当 $k\neq 0$ 时，联立$\begin{cases}y=k(x+2)+1\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+(4k^2+2k-4)x+4k^2+4k+1=0$，所以 $\Delta=(4k^2+2k-4)^2-4k^2(4k^2+4k+1)=0$，化简得 $2k^2+k-1=0$，所以 $k=-1$ 或 $k=\dfrac{1}{2}$，所以与抛物线有且只有一个公共点的直线有 3 条，故 B 错误；对于 C，线段 PF 的中点为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，又 $k_{PF}=\dfrac{1-0}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$，所以线段 PF 的中垂线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，即 $3x-y+2=0$，故 C 正确；对于 D，因为 $|AB|=4=2p$，此时线段 AB 为抛物线的通径，所以这样的直线只有一条，故 D 错误．故选 AC.

11. ABD　【解析】对于 A，由题可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot BB_1=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot BB_1=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=2$，故 A 正确；对于 B，设该“堑堵”外接球的半径为 R，因为 AB,BC,BB_1 两两垂直，则$(2R)^2=2^2+2^2+1=9$，所以 $S=4\pi R^2=9\pi$，故 B 正确；对于 C，当点 P 与 C_1 重合时，$|PA|_{\max}=|AC_1|=3$，故 C 错误；对于 D，连接 BC_1，由题可知 $AB\perp$平面 BB_1C_1C，所以$\angle AC_1B$ 为 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角，所以 $\tan\angle AC_1B=\dfrac{AB}{BC_1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 正确．故选 ABD.



12. ACD　【解析】因为 $f(x)$关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $f(x-1)=f(-x-1)$，所以 $f'(x-1)=-f'(-x-1)$，令 $x=0$，得 $f'(-1)=0$，故 A 正确；另由 $f(x-1)=f(-x-1)$，可得到 $f(x)=f(-x-2)$，所以 $f'(x)=-f'(-x-2)$，所以 $g(x)=-g(-x-2)$，所以 $g(x)$图象关于点$(-1,0)$对称，令 $x=2\ 023$，则 $g(2\ 023)+g(-2\ 025)=0$，故 B 错误；又因为 $g(3+2x)$为奇函数，所以 $g(3-2x)=$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$-g(3+2x)$，即 $g(3-x)=-g(3+x)$，所以 $g(x)$ 图象关于点 $(3,0)$ 对称，所以 $g(3)=0$，故 C 正确；由 $g(3-x)=-g(3+x)$ 得 $g(x)=-g(6-x)$，又 $g(x)=-g(-x-2)$，所以 $g(6-x)=g(-x-2)$，所以函数 $g(x)$ 的周期为 $T=8$，所以 $g(2\ 023)=g(252\times8+7)=g(7)=g(-1)=f'(-1)=0$，所以 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

13. 2 【解析】$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r x^{6-2r}$，令 $6-2r=3$，r 无解；令 $6-2r=2$，得 $r=2$，所以得展开式中 x^2 的系数为 $aC_6^2=15a$，依题令 $15a=30$，所以解得 $a=2$. 故答案为 2.

14. $x^2+y^2=25$ 或 $(x-3)^2+(y\pm4)^2=25$ 或 $(x-4)^2+(y\pm3)^2=25$（写出一个即可） 【解析】由三边长分别为 6，8，10 可知该三角形 ABC 为直角三角形，其外接圆的半径为 5，所以将直角顶点与坐标原点重合，边长为 6 的直角边落在 x 轴的正半轴上时，其外接圆的方程可以为 $(x-3)^2+(y\pm4)^2=25$；将直角顶点与坐标原点重合，边长为 8 的直角边落在 x 轴的正半轴上时，其外接圆的方程可以为 $(x-4)^2+(y\pm3)^2=25$；边长为 10 的斜边的中点落在原点时，其外接圆的方程可以为 $x^2+y^2=25$. 故答案为 $x^2+y^2=25$ 或 $(x-3)^2+(y\pm4)^2=25$ 或 $(x-4)^2+(y\pm3)^2=25$.（还可以有其它的答案）

15. $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=1$，得 $2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=1$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，因为 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$；而 $\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2\alpha\right)=\frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

16. ①③ 【解析】对①，因为 $f(x)=x^3-x\sin x$，所以 $f'(x)=3x^2-\sin x-x\cos x$，所以 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，所以 0 为函数 $f(x)$ 的双重不动点；对②，$f(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$，令 $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{x^2}-x$，当 $x>0$ 时，由基本初等函数图象易知 $e^x>x$，所以 $e^x+\frac{1}{x^2}-x>0$；当 $x<0$ 时，$e^x+\frac{1}{x^2}-x>0$ 显然成立，所以不存在 x_0，使得 $f'(x_0)=x_0$，故 $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 不是具有双重不动点的函数；对于③，因为 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$，所以 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，而 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，所以 0 为函数 $f(x)$ 的双重不动点，所以具有双重不动点的函数是①③. 故答案为①③.

四、解答题

17. 解：(1) 由 $\frac{1}{2}\sin 2B\cos C+\cos^2B\sin C-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=0$，得 $\cos B\sin B\cos C+\cos^2B\sin C-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=0$，$\cos B\sin(B+C)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，所以 $2\cos B\sin A=\sin A$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq0$， （3 分）

所以 $2\cos B=1$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，

又因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. （4 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

(2)设$\triangle ABC$外接圆的半径为r，则由(1)及正弦定理得$\dfrac{b}{\sin B}=2r$，

$b=2\times\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}=2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$.　　(5分)

因为点D为AC中点，所以在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$c^2=BD^2+\dfrac{9}{4}-2BD\times\dfrac{3}{2}\cos\angle ADB=BD^2+\dfrac{9}{4}-3BD\cos\angle ADB$,　　(6分)

同理在$\triangle CBD$中，由余弦定理得$a^2=BD^2+\dfrac{9}{4}-2BD\times\dfrac{3}{2}\cos\angle CDB=BD^2+\dfrac{9}{4}+3BD\cos\angle ADB$,　　(7分)

上述两式两边分别相加得$a^2+c^2=2BD^2+\dfrac{9}{2}$，得

$BD^2=\dfrac{2a^2+2c^2-9}{4}$,　　(8分)

所以$BD=\dfrac{\sqrt{2a^2+2c^2-9}}{2}$.　　(10分)

18. 解：(1)当$n=2$时，$2S_2+2S_1=a_2^2-3$，$a_2>0$，解得$a_2=5$.

因为当$n\geqslant2$时，$2S_n+2S_{n-1}=a_n^2-3(n\geqslant2)$，

所以当$n\geqslant3$时，$2S_{n-1}+2S_{n-2}=a_{n-1}^2-3$，

两式相减得：$2a_n+2a_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2$，即$2(a_n+a_{n-1})=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$，

因为$a_n>0$，所以$a_n-a_{n-1}=2$，

又因为$a_2-a_1=2$适合上式，

所以$a_n=2n+1$.　　(4分)

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$.　　(5分)

(2)由(1)可知$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{2n+1}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^n}$,　　(6分)

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\left(1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)+1-\dfrac{1}{2^n}$.　　(8分)

记$R_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$,

所以$\dfrac{1}{2}R_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$,

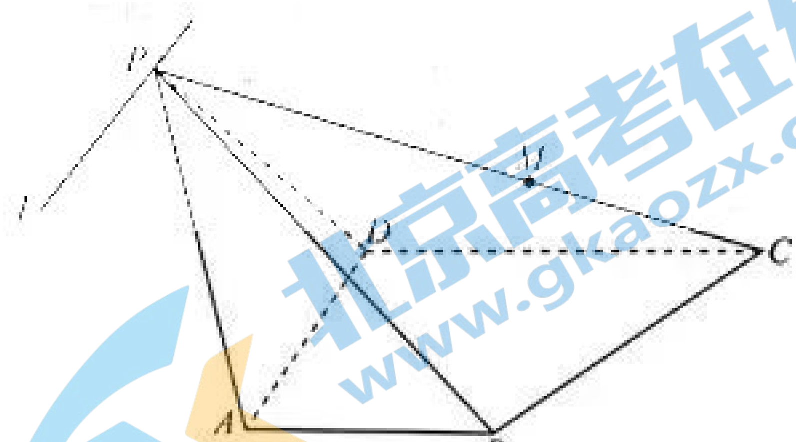
两式相减得$\dfrac{1}{2}R_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$,

$R_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.　　(11分)

所以$T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$.　　(12分)

19. 解：(1)存在直线l，使直线$l\parallel$平面$ABCD$.　　(1分)

作法如下：



在平面PAD内，过点P作直线$l\parallel AD$，则该直线即为所直线.　　(2分)

理由如下：因为$l\parallel AD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$l\not\subset$平面$ABCD$，

所以直线$l\parallel$平面$ABCD$.　　(4分)

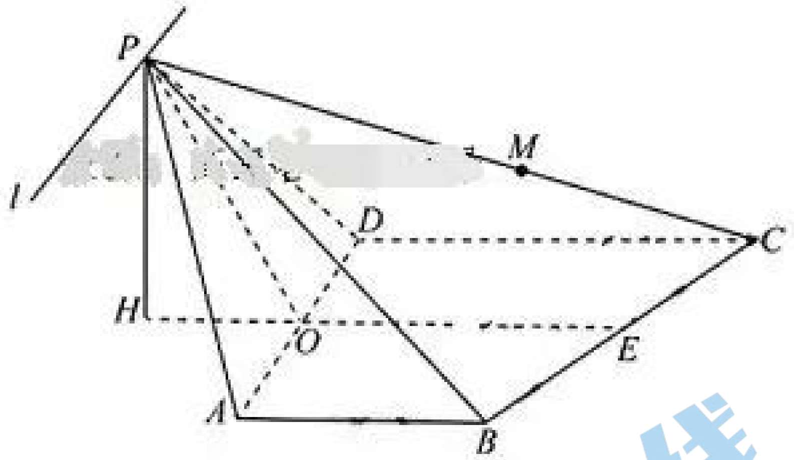
(2)法一：取AD中点O，BC中点E，连接PO，OE，

则$OE\parallel AB$，又由$PA=PD$可知$PO\perp AD$，

由$AD\perp AB$，知$OE\perp AD$，所以$\angle POE$为二面角$P-AD-B$的平面角，所以$\angle POE=135^\circ$，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

延长 EO，过点 P 作 $PH \perp EO$，交 EO 的延长线于点 H，则 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，



所以 $PH=\frac{a}{2}$，且 $\angle POH=45°$，从而得到 $PO=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，　　（8分）

所以 $S_{\triangle PAD}=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$，

因为 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$，所以点 M 到平面 PAD 的距离为点 C 到平面 PAD 的距离的 $\frac{2}{3}$，

由 $V_{P-ACD}=V_{C-PAD}$ 及 $S_{\triangle ACD}=a^2$，得点 C 到平面 PAD 的距离为 $\sqrt{2}a$，所以点 M 到平面 PAD 的距离为 $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.　　（12分）

法二：取 AD 中点 O，BC 中点 E，连接 PO，OE，则 $OE/\!/AB$，又由 $PA=PD$ 可知 $PO\perp AD$，

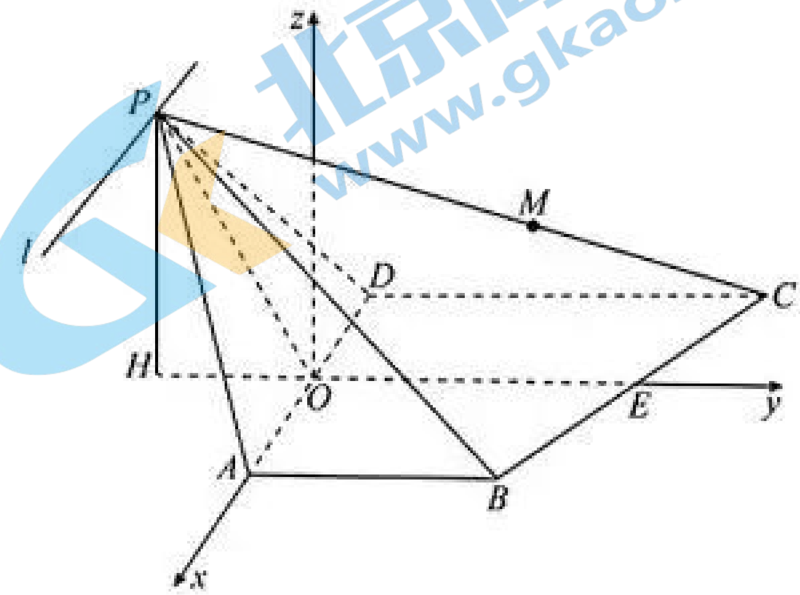
由 $AD\perp AB$，知 $OE\perp AD$，所以 $\angle POE$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角，所以 $\angle POE=135°$，

延长 EO，过点 P 作 $PH\perp EO$，交 EO 的延长线于点 H，则 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PH=\frac{a}{2}$，且 $\angle POH=45°$，从而得到 $OH=\frac{a}{2}$，　　（5分）

又由条件可知 $AD\perp$ 平面 POE，所以过点 O 作 $Oz/\!/PH$，则 $Oz\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 OA，OE，Oz 两两相互垂直，所以分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{Oz}$ 所在直线的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，



所以 $A\left(\frac{a}{2},0,0\right)$，$D\left(-\frac{a}{2},0,0\right)$，$P\left(0,-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，$C\left(-\frac{a}{2},2a,0\right)$，

又由 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MC}$，得 $M\left(-\frac{a}{3},\frac{7a}{6},\frac{a}{3}\right)$，　　（7分）

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-a,0,0)=0\\ (x,y,z)\cdot\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.　　（9分）

又因为 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{5a}{6},\frac{7a}{6},\frac{a}{6}\right)$，　　（10分）

所以点 M 到平面 PAD 的距离为：

$|\overrightarrow{AM}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{\left|\left(-\frac{5a}{6},\frac{7a}{6},\frac{a}{6}\right)\cdot(0,1,1)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.　　（12分）

20. 解：(1)该顾客票据单上总购买金额为 800 元，而恰好返还 240 元，所以该顾客在三次转动圆盘中，指针出现一次或两次指向“4”，所以 $P=C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^1=\frac{75}{216}+\frac{15}{216}=$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$，

所以该顾客参与活动恰好返还 240 元的概率为$\frac{5}{12}$.

（3 分）

(2)X 表示该顾客在三次转动圆盘中，指针出现指向“4”的次数，则 X 可能的取值为 0，1，2，3.　　（4 分）

每次指针指向“4”的概率为 $p=\frac{1}{6}$.　　（5 分）

$X\sim B\left(3,\frac{1}{6}\right)$，

所以 $P(X=0)=C_3^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$，

$P(X=1)=C_3^1\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{15}{216}$，

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$.　　（8 分）

该顾客在此商场最终支付的金额 Y 的取值为 800，560，400.

$P(Y=800)=P(X=0)=\frac{125}{216}$，$P(Y=560)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{75}{216}+\frac{15}{216}=\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$，

$P(Y=400)=P(X=3)=\frac{1}{216}$，

所以 Y 的分布列为：

Y	800	560	400
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{216}$

（11 分）

所以 $E(Y)=800\times\frac{125}{216}+560\times\frac{5}{12}+400\times\frac{1}{216}=\frac{18\ 850}{27}\approx698$ 元.　　（12 分）

21. **解**：(1)由题可知 $A(a,0)$，$B(0,b)$，所以直线 AB 的方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为过 A，B 两点的直线平分圆 $(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ 的周长，所以 $\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{3}}{2b}=1$，　①（1 分）

又依题可知直线与坐标轴围成的三角形的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}$，　②　　（2 分）

所以由①②解得：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　（4 分）

(2)由直线的方程为 $y=x+m$，则$(0,3m)$到直线的距离为 $d=\sqrt{2}|m|$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=x+m\end{cases}$，整理得 $7x^2+8mx+4m^2-12=0$，

（5 分）

由判别式 $\Delta=64m^2-4\times7(4m^2-12)>0$，解得 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$，　　（7 分）

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8m}{7}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-12}{7}$，　　（8 分）

由弦长公式可得 $|CD|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}$

$=\sqrt{2}\sqrt{\frac{64m^2}{49}-\frac{4(4m^2-12)}{7}}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-3m^2}$，　　（9 分）

所以 $S_{\triangle CDM}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-3m^2}\times\sqrt{2}|m|$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\sqrt{(7-m^2)\cdot m^2}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{7-m^2+m^2}{2}=2\sqrt{3}$，

（11 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

当且仅当 $m=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$ 时，等号成立，

所以所求直线的方程为 $y=x+\frac{\sqrt{14}}{2}$ 或 $y=x-\frac{\sqrt{14}}{2}$.　　（12 分）

22. 解：(1)由 $f(x)=\ln x+ax^2+2$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{1+2ax^2}{x}$.　　（1 分）

当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，　　（2 分）

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$（$x=-\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 舍去），

当 $x\in\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，　　（3 分）

当 $x\in\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，　　（4 分）

综上：当 $a\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$ 单调递增，在 $\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 单调递减.　　（5 分）

(2)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x-x^2+2$.

由(1)知 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递增，在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}>0$.　　（6 分）

又 $f(2)=\ln2-2<0$，所以在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$ 上存在零点，

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递减，所以在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 存在唯一零点；

又 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^4}+2=-\frac{1}{e^4}<0$，所以在区间 $\left(\frac{1}{e^2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上存在零点；

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递增，所以在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 存在唯一零点；　　（8 分）

所以函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1,x_2，不妨设 $0<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}<x_2<2$.

要证 $x_1+x_2>\sqrt{2}$，即证 $x_2>\sqrt{2}-x_1$，又因为 $x_1\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\sqrt{2}-x_1\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 且 $x_2\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，

所以只需证明 $f(x_2)<f(\sqrt{2}-x_1)$，又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

所以只要证明 $f(x_1)<f(\sqrt{2}-x_1)$，即证明 $f(x_1)-f(\sqrt{2}-x_1)<0$.

构造函数 $g(x)=f(x)-f(\sqrt{2}-x)$，$x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，　　（9 分）

所以 $g'(x)=f'(x)+f'(\sqrt{2}-x)=\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{\sqrt{2}-x}-2(\sqrt{2}-x)=\frac{\sqrt{2}}{x(\sqrt{2}-x)}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}x-1)^2}{x(\sqrt{2}-x)}>0$，　　（10 分）

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递增，所以 $g(x)<g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$，

所以 $f(x)-f(\sqrt{2}-x)<0$，从而 $f(x_1)-f(\sqrt{2}-x_1)<0$ 得证，

所以 $x_1+x_2>\sqrt{2}$ 得证.　　（12 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！