2022 北京密云高三一模

数　　学

2022.4

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $P=\{x\mid 0<x<4,x\in\mathbf{Z}\}$，且 $M\subseteq P$，则 M 可以是

A．$\{1,2\}$　　B．$\{2,4\}$　　C．$\{0,2\}$　　D．$\{3,4\}$

2．已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,-4)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 x 的值为

A．2　　B．-2　　C．8　　D．-8

3．已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_5=S_5=5$，则公差 d 等于

A．3　　B．-3　　C．2　　D．-2

4．已知复数 $z=a-\mathrm{i}$（其中 $a\in\mathbf{R}$），则下面结论正确的是

A．$\bar{z}=-a+\mathrm{i}$

B．$z\cdot\mathrm{i}=-1+a\mathrm{i}$

C．$|z|>1$

D．在复平面上，z 对应的点在直线 $y=-1$ 上

5．二项式 $(x-\dfrac{2}{x})^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数是

A．-60　　B．60　　C．-15　　D．15

6．已知 $x>y$，则下列各式中一定成立的是

A．$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$　　B．$(\dfrac{1}{2})^x>(\dfrac{1}{2})^y$

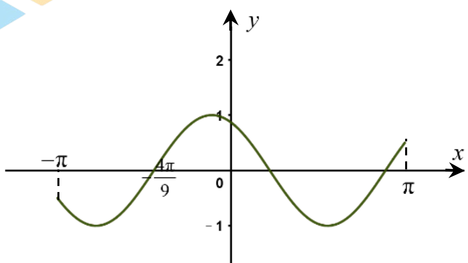
C．$\ln(x+1)>\ln(y+1)$　　D．$2^x+2^{-y}>2$

7．在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，则“$A<B$”是“$\sin A<\sin B$”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如图所示，则 $f(x)$ 的最小正周期为



第 8 题图

A．$\dfrac{4\pi}{3}$　　B．$\dfrac{10\pi}{9}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{10}{9}$

9．我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果．哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”（大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数叫做素数），如 36＝5＋31．在不超过 36 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 36 的概率是

A. $\frac{4}{11}$　　B. $\frac{4}{55}$　　C. $\frac{2}{33}$　　D. $\frac{4}{45}$

10．正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, E,F 分别是棱 AA'，CC' 的中点，过直线 EF 的平面分别与棱 BB'、DD' 交于 M,N，设 $BM=x$，$x\in(0,1)$，则下列结论中不正确的是

A．四边形 $MENF$ 为平行四边形

B．若四边形 $MENF$ 面积 $s=f(x),x\in(0,1)$,则 $f(x)$ 有最小值

C．若四棱锥 $A-MENF$ 的体积 $V=p(x)$，$x\in(0,1)$，则 $p(x)$ 常函数

D．若多面体 $ABCD-MENF$ 的体积 $V=h(x)$，$x\in(\frac{1}{2},1)$，则 $h(x)$ 为单调函数

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．已知抛物线 $y^2=4x$，则抛物线的准线方程是_____．

12．已知 $a,4,c$ 成等比数列，且 $a>0$，则 $\log_2 a+\log_2 c=$_____．

13．银行储蓄卡的密码由 6 位数字组成，某人在银行自助取款机上取钱时，忘记了密码的最后 1 位数字，如果记得密码的最后 1 位是偶数，则第 2 次按对的概率是______．

14．设 F_1，F_2 为双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两个焦点，若双曲线 C 的两个顶点恰好将线段 F_1F_2 三等分，则双曲线 C 的离心率为____；渐近线方程为______．

15．已知点 $A(2,0)$，$B(0,2)$ 和点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\mathbf{R}$．给出下列四个结论

①点 P 到直线 AB 的最大距离为 $\sqrt{2}+1$；

②当 $\angle PAB$ 最大时，$|PA|=\sqrt{3}$；

③ΔPAB 的面积的最大值为 $4+\sqrt{2}$；

④若 $y=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$，则 $4-2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 4+2\sqrt{2}$．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题: 本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题满分 14 分）

在△ ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b=\sqrt{6}$，$A=\frac{2\pi}{3}$．再在条件①、条件②、条件③中选择 1 个作为已知，使得△ ABC 存在并且唯一．

（I）求 c 的值；

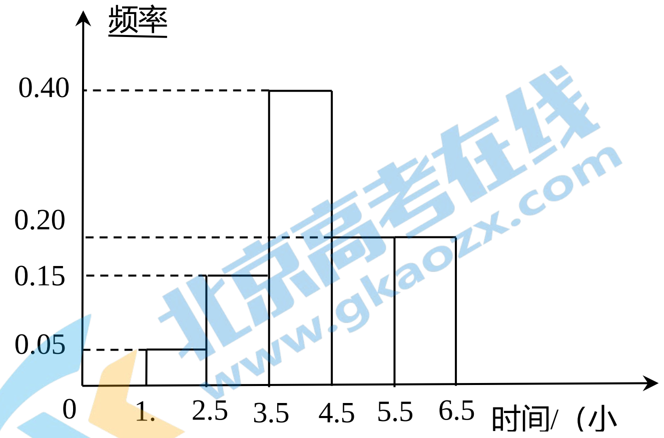
（II）求△ ABC 的面积．

条件① $B=\frac{\pi}{4}$；条件② $a=\sqrt{3}$；条件③ $a=3$．

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

17. （本小题满分 14 分）

从 2008 年的夏季奥运会到 2022 年的冬季奥运会，志愿者身影成为“双奥”之城的“最美名片”．十几年间志愿精神不断深入人心，志愿服务也融入社会生活各个领域．2022 年的北京冬奥会共录用赛会志愿者 18000 多人．中学生志愿服务已经纳入学生综合素质评价体系，为了解中学生参加志愿服务所用时间，某市教委从全市抽取部分高二学生调查 2020—2021 学年度上学期参加志愿服务所用时间，把时间段按照 $[1.5,2.5)$，$[2.5,3.5)$，$[3.5,4.5)$，$[4.5,5.5)$，$[5.5,6.5]$ 分成 5 组，把抽取的 600 名学生参加志愿服务时间的样本数据绘制成如图所示的频率分布直方图．



参加志愿服务时间频率分布直方图

（I）根据频率分布直方图，用每一个小矩形的中点值代替每一组时间区间的平均值，估计这 600 名高二学生上学期参加志愿服务时间的平均数．并写出这 600 个样本数据的第 75 百分位数的一个估计值．

（II）若一个学期参加志愿服务的时间不少于 3.5 小时视为“预期合格”，把频率分布直方图中的频率视为该市高二学生上学期参加志愿服务时间的概率，从全市所有高二学生中随机抽取 3 名学生，设本学期这 3 名学生中达到“预期合格”的人数为 X，求 X 的分布列并求数学期望 $E(X)$．

（III）用每一个小矩形的中点值代替每一组时间区间的平均值，把时间段在 $[1.5,4.5)$ 的数据组成新样本组 A，其方差记为 s_1^2，把时间段在 $[3.5,6.5]$ 的数据组成新样本组 B，其方差记为 s_2^2，原来 600 个样本数据的方差记为 s_3^2，试比较 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小（结论不要求证明）．

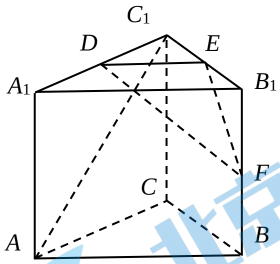
18. （本小题满分 15 分）

如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=BC=CC_1=2$，点 D,E 分别为棱 A_1C_1，B_1C_1 的中点，点 F 是线段 BB_1 上的点（不包括两个端点）.

（I）设平面 DEF 与平面 ABC 相交于直线 m，求证：$A_1B_1 // m$；

（II）当 F 为线段 BB_1 的中点时，求点 B 到平面 DEF 的距离；

（III）是否存在一点 F，使得二面角 $C-AC_1-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，如果存在，求出 $\frac{BF}{BB_1}$ 的值；如果不存在，说明理由.



第 18 题图

19. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x\ln(2x+1)-ax^2$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）当 $a<0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值；

（III）请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

20．（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点坐标为 $A(2,0)$，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的方程和椭圆的短轴长；

（II）若过点 A 的两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于两点 P，Q（P，Q 与 A 不重合），试判断直线 PQ 是否经过定点，若经过定点，求出定点坐标；若不存在，请说明理由；

（III）作 $AM\perp PQ$ 于点 M，则存在定点 M_0，使得 $|MM_0|$ 为定值，请写出这个定值（只要求写出结果）.

21．（本小题满分 14 分）

设 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}$，集合 $U=\{1,2,3,4,\cdots,2n\}$，若对 U 的任意 k 元子集 V_k，都存在 $a,b,c\in V_k$，满足：$a<b<c$，$a+b>c$，且 $a+b+c$ 为偶数，则称 V_k 为理想集，并将 k 的最小值记为 K.

（I）当 $n=2$ 时，是否存在理想集？若存在，求出相应的 K；若不存在，请说明理由.

（II）当 $n=3$ 时，是否存在理想集？若存在，直接写出对应的 V_k 以及满足条件的 a,b,c；若不存在，请说明理由.

（III）证明：当 $n=4$ 时，$K=6$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	C	D	B	D	C	A	B	D

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$x=-1$　　12．4

13．$\dfrac{1}{5}$　　14．3；$y=\pm 2\sqrt{2}x$

15．①②④（选择中含有③，记 0 分；当选择中不含③时，①②④中只选一个，记 3 分；①②④中只选两个，记 4 分；全对，记 5 分．）

备注：若小题有两问，第一问 3 分，第二问 2 分.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（本小题满分 14 分）

解：选择条件①：$B=\dfrac{\pi}{4}$.

（I）在△ABC 中，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$　……………4 分

$=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.　……………5 分

由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，　……………7 分

即 $\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$，解得 $c=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.　……………8 分

（II）所以 ΔABC 的面积为

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$.　……………14 分

选择条件③：$a=3$.

（I）在△ABC 中，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，　……………3 分

即 $9=6+c^2-2\sqrt{6}c\times(-\dfrac{1}{2})$，

所以 $c^2+\sqrt{6}c-3=0$.　……………6 分

因此 $c=\dfrac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$（舍负）.　……………8 分

（II）所以 ΔABC 的面积为

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9-3\sqrt{3}}{4}.$$ ……………14 分

注意：选择②，$a=\sqrt{3}$．

因为 $b=\sqrt{6}$，所以 $a<b$，与 $A=\frac{2\pi}{3}$ 是钝角矛盾，这样的三角形不存在．

17．（本小题满分 14 分）

解：（I）平均数为 $\bar{x}=2\times0.05+3\times0.15+4\times0.4+5\times0.2+6\times0.2=4.35$ 小时；……2 分

（公式和结果各占 1 分）

这 600 个样本数据的 75%分位数是 4.5+0.75=5.25． ……………3 分

（II）由频率分布直方图可得，从 600 名样本数据中随机抽取 1 名学生，达到“预期合格”

概率为 $\frac{4}{5}$． ……………4 分

所以 $X\sim B(3,\frac{4}{5})$，X 的取值范围为 $\{0,1,2,3\}$． ……………..5 分

$$P(X=0)=C_3^0\times(\frac{4}{5})^0\times(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{125},$$

$$P(X=1)=C_3^1\times(\frac{4}{5})^1\times(\frac{1}{5})^2=\frac{12}{125},$$

$$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{4}{5})^2\times(\frac{1}{5})^1=\frac{48}{125},$$

$$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{4}{5})^3\times(\frac{1}{5})^0=\frac{64}{125}.$$ ……………9 分

所以，X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

……..……10 分

（单个概率写对，表格列对共 4 分，若单个概率有错误，则写对 1 个给 1 分，表格不给分了）

$$E(X)=np=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}.$$ …………12 分

或写成：$E(X)=0\times\frac{1}{125}+1\times\frac{12}{125}+2\times\frac{48}{125}+3\times\frac{64}{125}=\frac{300}{125}=\frac{12}{5}$．

（列式和结果各占 1 分）

（III）$s_1^{\ 2}<s_2^{\ 2}<s_3^{\ 2}$． …………14 分

（全对 2 分，写对一组大小关系给 1 分）

18. （本小题满分 15 分）

解：（I）方法一：

因为平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 ABC， --------1 分

平面 $A_1B_1C_1 \cap$ 平面 $DEF = DE$， 平面 $ABC \cap$ 平面 $DEF = m$，

所以 $DE//m$． ---------2 分

因为 D, E 分别为 A_1C_1, B_1C_1 中点,

所以 $DE//A_1B_1$． - --------3 分

所以 $A_1B_1//m$． ---------4 分

方法二：

因为 D, E 分别为 A_1C_1, B_1C_1 中点,

所以 $DE//A_1B_1$． - --------1 分

因为 $A_1B_1//AB$，所以 $DE//AB$．

因为 $DE \not\subset$ 平面 ABC， $AB \subset$ 平面 ABC，

所以 DE// 平面 ABC． ---------2 分

又因为平面 $ABC \cap$ 平面 $DEF = m$， $DE \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $DE//m$． ---------3 分

因为 $DE//A_1B_1$，所以 $A_1B_1//m$． ---------4 分

方法三：

因为平面 $A_1B_1C_1$// 平面 ABC， $DE \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

DE// 平面 ABC ---------1 分

又因为平面 $ABC \cap$ 平面 $DEF = m$，

所以 $DE//m$． ---------2 分

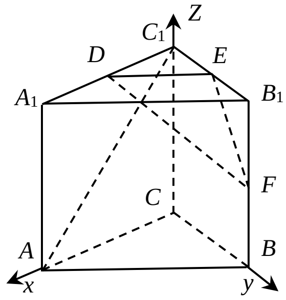
因为 D, E 分别为 A_1C_1, B_1C_1 中点,

所以 $DE//A_1B_1$． - --------3 分

所以 $A_1B_1//m$． ---------4 分

（II）在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC， $AC \perp BC$，

以 C 为原点，建立空间直角坐标系 $C - xyz$， 如图． ---------5 分



由题意得 $A(2,0,0), B(0,2,0), C_1(0,0,2)$,，

所以 $D(1,0,2)$, $E(0,1,2)$, $F(0,2,1)$， $\overrightarrow{DE} = (-1,1,0)$, $\overrightarrow{EF} = (0,1,-1)$．

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$， 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x + y = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$ ---------6 分

令 $x_1 = 1$， 得 $y_1 = 1, z_1 = 1$．

于是 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. ---------7 分

设点 B 到平面 DEF 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BF}\bullet \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$. ---------8 分

因为 $\overrightarrow{BF}=(0,0,1)$，

所以 $d=\dfrac{|0\times 1+0\times 1+1\times 1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ---------9 分

（III）因为 $B_1(0,2,2),C_1(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$.

设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BB_1}$，（$0<\lambda<1$）.

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BB_1}=(-2,2,2\lambda)$.

设平面 AC_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y+2\lambda z=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$ ---------10 分

令 $x=1$，得 $y=1-\lambda,z=1$，

于是 $\boldsymbol{n}=(1,1-\lambda,1)$. ---------11 分

因为 $CB\perp$ 平面 ACC_1，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 是平面 ACC_1 的法向量. ---------12 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{1^2+(1-\lambda)^2+1^2}}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)^2+2}}$. ---------13 分

设二面角 $C-AC_1-F$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.

所以 $\dfrac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2+2}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，或 $\lambda=\dfrac{3}{2}$（舍）. ---------14 分

所以存在一点 F，符合题意，并且 $\dfrac{BF}{BB_1}=\dfrac{1}{2}$. ---------15 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（I）$f(x)=x\ln(2x+1)-ax^2$ 的定义域为 $\{x\,|\,x>-\dfrac{1}{2}\}$. ---------1 分

因为 $f(0)=0\ln(0+1)-a\cdot 0^2=0$， ---------2 分

所以切点的坐标为 $(0,0)$.

因为 $f'(x)=\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{2x+1}-2ax$， ---------4 分

$f'(0)=\ln(0+1)+\dfrac{0}{0+1}-2a\cdot 0=0$. ---------5 分

所以切线的斜率 $k=0$，

所以切线的方程为 $y=0$. ---------6 分

（II）方法一：

令 $g(x)=f'(x)=\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{2x+1}-2ax$，

$g'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{2}{(2x+1)^2}-2a$．　　　　　　---------8 分

因为 $x>-\dfrac{1}{2}$ 且 $a<0$，

所以 $\dfrac{2}{2x+1}>0$，$\dfrac{2}{(2x+1)^2}>0$，$-2a>0$，

从而得到 $g'(x)>0$ 在 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上恒成立.

所以 $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.　　　　---------10 分

所以 x，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\dfrac{1}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，问题得证.　　　　---------12 分

方法二：

因为 $f'(x)=\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{2x+1}-2ax$，

当 $a<0$ 时，

当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$\ln(2x+1)<0$，$\dfrac{2x}{2x+1}<0$，$-2ax<0$，

所以 $f'(x)<0$．　　　　---------8 分

当 $x>0$ 时，$\ln(2x+1)>0$，$\dfrac{2x}{2x+1}>0$，$-2ax>0$，

所以 $f'(x)>0$．　　　　---------10 分

所以 x，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\dfrac{1}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，问题得证.　　　　---------12 分

（III）当 $a\leqslant 0$ 或 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点，　　　　---------13 分

当 $a>0$ 且 $a\neq 2$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.　　　---------14 分

20．（本小题满分 14 分）

解：（I）由题意可知 $\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ b^2+c^2=a^2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}. \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，短轴长为 2. ....5 分

（II）当直线 PQ 的斜率存在时，设 PQ 的方程为 $y=kx+m$

由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ y=kx+m. \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，　..................6 分

所以 $\Delta=(8km)^2-4\times(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)$.

因此 $4k^2-m^2+1>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$，　$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$.　　........................7 分

因为 $AP\perp AQ$，所以 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AQ}=0$，即 $(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$．.........8 分

因此 $(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

所以 $(1+k^2)x_1x_2-(2-km)(x_1+x_2)+m^2+4=0$.　　........................9 分

因此 $\dfrac{4(k^2+1)(m^2-1)}{4k^2+1}+\dfrac{8km(2-km)}{4k^2+1}+m^2+4=0$，

化简得 $12k^2+16km+5m^2=0$，　　　........................10 分

解得 $m=-2k$，或 $m=-\dfrac{6}{5}k$.

所以直线 PQ 的方程为 $y=kx-2k$，或 $y=kx-\dfrac{6}{5}k$.　.....................11 分

此时直线 PQ 经过定点 $(2,0)$（舍），或 $(\dfrac{6}{5},0)$.　　.....................12 分

当直线 PQ 的斜率不存在时，容易验证直线 $x=\dfrac{6}{5}$ 符合题意要求．.........13 分

综上可求，直线 PQ 经过定点 $(\dfrac{6}{5},0)$.

（III）$|MM_0|=\frac{2}{5}$．　　　　　　　　　………………………………14 分

21．（本小题满分 14 分）

解：（I）当 $n=2$ 时，不存在理想集．　　　　　-----------------------------------2 分

理由如下：

当 $n=2$ 时，$U=\{1,2,3,4\}$，　　　　　　　　-----------------------------------3 分

假设存在理想集 V_k，

因为对于 $a,b,c\in V_k$，$a+b+c$ 为偶数，

所以 a,b,c 为两个奇数一个偶数，所以 $1,3\in V_k$，　-----------------------------------4 分

又因为 $1+2=3$，$1+3=4$，均与“$a<b<c$，$a+b>c$”矛盾！

所以假设不成立，

所以当 $n=2$ 时，不存在理想集．　-----------------------------------5 分

（II）当 $n=3$ 时，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 存在理想集，且 $K=6$．　------------------------7 分

$V_6=U=\{1,2,3,4,5,6\}$，取 $a=3,b=4,c=5$ 即可满足要求．　　--------------9 分

（III）当 $n=4$ 时，$U=\{1,2,3,4,\cdots,8\}$

（1）先证明 $k=6$ 时，一定存在理想集．

任取 U 的一个 6 元子集 V_6，则 $V_6\cap\{3,4,5,6,7,8\}$ 中至少含有 4 个元素．

记 $V_6\cap\{3,4,5,6,7,8\}=T$，则 T 中至多有 3 个偶数，至少有 1 个偶数．

① 若 T 中恰有 3 个偶数，则 $4,6,8\in T$，已满足题意；

② 若 T 中恰有 2 个偶数，则 T 中含有来自 $\{3,5,7\}$ 的至少两个奇数．

对于 $3,5\in T$，$3,7\in T$，$5,7\in T$ 这三种情况，

都可以从 $\{4,6\}$，$\{4,8\}$，$\{6,8\}$ 中找到一个偶数组成满足题意的三数组；

③ 若 T 中恰有 1 个偶数，则 $3,5,7\in T$，此偶数与 $5,7$ 即可组成满足题意的三数组；-----------------------------------12 分

所以 $K\leqslant 6$．

（2）再用反证法证明 $K\geqslant 6$．

假设 $K\leqslant 5$，取 $V_k=\{1,2,3,5,7\}$，则 V_k 中含有 4 个奇数，1 个偶数．

因为对于 $a,b,c\in V_k$，$a<b<c$ 且 $a+b+c$ 为偶数，

所以 $2\in\{a,b\}$．且另外两个数均为奇数．

又因为任意两个奇数之差大于等于 2．

所以 $a+b\leqslant c$，与“$a+b>c$”矛盾！

所以假设不成立，所以 $K\geqslant 6$．　　-----------------------------------14 分

综合（1）（2）所证，$K=6$．