北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高三数学统考一

（本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid 3^x<1\}$, 则 $A\cup B=$ (　　)

(A) $[-1,0)$　　(B) $(-\infty,0)$　　(C) $[-1,1]$　　(D) $(-\infty,1]$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{2+3i}{i}$ 对应的点位于 (　　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

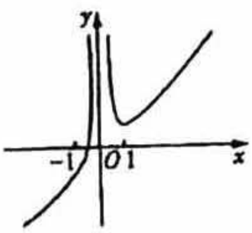
3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比相等，那么数列 $\{a_n\}$ 中与 a_3a_7 一定相等的项是 (

(A) a_{10}　　(B) a_9　　(C) a_7　　(D) a_5

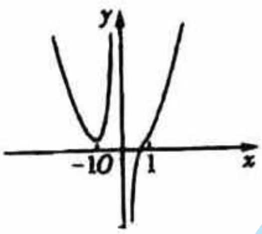
4. 下列函数中，是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 (　　)

(A) $f(x)=x^2-|x|$　　(B) $f(x)=e^{|x|}$　　(C) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(D) $f(x)=|\ln x|$

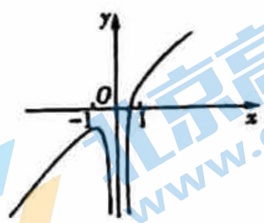
5. 函数 $y=x^2+\dfrac{\ln|x|}{x}$ 的图象大致为 (　　)



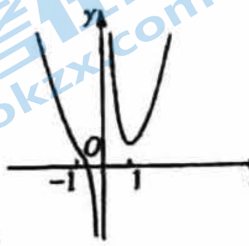
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{a}=(2,0)$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 等于 (　　)

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) 4　　(D) 12

7. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$, 则 "$a>b$" 的一个充分而不必要条件是 (　　)

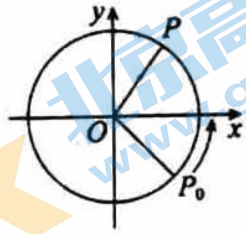
(A) $a^2>b^2$　　(B) $a^3>b^3$　　(C) $2^a>2^b$　　(D) $ac^2>bc^2$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A<\cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状必为 (　　)

(A) 锐角三角形　　(B) 直角三角形

(C) 钝角三角形　　(D) 以上答案均有可能

9. 如图，质点 P 在以坐标原点 O 为圆心，半径为 1 的圆上逆时针作匀速圆周运动，P 的角速度大小为 2 rad/s，起点 P_0 为射线 $y=-x\ (x\geqslant 0)$ 与 $\odot O$ 的交点. 则当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时，记动点 P 的纵坐标关于 t（单位：s）的函数为 $y=g(t)$，则下列哪个区间为函数 $y=g(t)$ 的一个单调递增区间（　　）



sinθ.

(A) $[0,\frac{\pi}{2}]$　　(B) $[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}]$　　(C) $[\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8}]$　　(D) $[\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{4}]$

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正整数 T，对于任意正整数 n，都有 $a_{n+T}=a_n$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，周期为 T. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=m\ (m>0)$，$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1, & a_n>1, \\ \frac{1}{a_n}, & 0<a_n\leqslant 1. \end{cases}$ 则下列结论中错误的是（　　）

(A) 若 $a_3=4$，则 m 可以取 3 个不同的值

(B) 若 $m=\sqrt{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列

(C) $\forall T\in\mathbf{N}^*$ 且 $T\geqslant 2$，存在 $m>1$，$\{a_n\}$ 是周期为 T 的数列

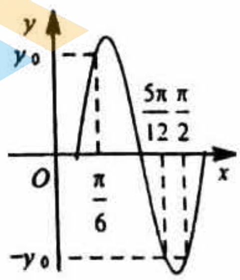
(D) $\exists m\in\mathbf{Q}$ 且 $m\geqslant 2$，数列 $\{a_n\}$ 是周期数列

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 计算：$\lg 6-\lg\frac{3}{5}-\sqrt[4]{(-4)^2}=$ ________.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，若 $f(a-1)>f(2-a)$，则实数 a 的取值范围是 ________.

13. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $\omega=$ ________，$\varphi=$ ________.



14. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=4$，且 $|\overrightarrow{AP}|=1$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为 ________.

15. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+2t$, $g(x)=e^x-t$. 给出下列四个结论:

①当 $t=0$ 时, 函数 $y=f(x)g(x)$ 有最小值;

② $\exists t\in\mathbf{R}$, 使得函数 $y=f(x)g(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增;

③ $\exists t\in\mathbf{R}$, 使得函数 $y=f(x)+g(x)$ 没有最小值;

④ $\exists t\in\mathbf{R}$, 使得方程 $f(x)+g(x)=0$ 有两个根且两根之和小于 2.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

已知公差大于 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_5=12$, $a_3a_4=35$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 S_m, a_2, a_i $(m,i\in\mathbf{N}^*)$ 成等比数列, 求 m, i 的值.

17. (本小题 13 分)

已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(1) b 和 c 的值;

(2) $\sin(A-B)$ 的值.

条件①: $a=6$, $\cos C=-\frac{1}{3}$; 条件②: $A=C$, $\cos B=-\frac{7}{9}$.

18. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值和最小值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 设 $g(x)=f(x)f(x-\frac{\pi}{6})$. 当 $x\in[0,m]$ 时, $g(x)$ 的取值范围为 $[0,2+\sqrt{3}]$, 求 m 的最大值

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=e^x+a\sin x-1$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 求 a 的值;

(3) 若存在正实数 m, 使得对任意的 $x\in(0,m)$, 都有 $f(x)<0$, 求 a 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}\ (n=1,2,3\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x,y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x,y 中最小的数.

（Ⅰ）当 $a_1=1,a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（Ⅲ）若 $a_n>0\ (n=1,2,3\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

北京一零一中 2023-2024 学年度第一学期高三数学统考一参考答案

1. D 2. D 3. A 4. C 5. B 6. B 7. D 8. C 9. B 10. D 11. -1. 12. $(\frac{3}{2},+\infty)$.

13. 4; $-\frac{\pi}{3}$. 14. -2. 15. ①②④.

16. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, $d>0$.

因为 $a_2+a_5=12$, 所以 $a_3+a_4=12$.

又因为 $a_3a_4=35$, $d>0$,

所以 $a_3=5$, $a_4=7$. 所以 $d=2$, $a_1=1$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 因为 $a_n=2n-1$, 所以 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2$.

因为 S_m, a_2, a_i 成等比数列,

所以 $S_m a_i=a_2^2$, 即 $m^2(2i-1)=9$.

而 $m,i\in\mathbf{N}^*$, 所以 $m=1$, $2i-1=9$; 或 $m=3$, $2i-1=1$.

经检验, 符合题意.

所以 $m=1$, $i=5$; 或 $m=3$, $i=1$.

17. 若选择条件①:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\cos C=-\dfrac{1}{3}$,

所以 $C\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{2}$, $a=6$, 所以 $b=2$.

由余弦定理, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=48$,

所以 $c=4\sqrt{3}$.

(2) 由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, 可得 $\dfrac{6}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

因为 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos B=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

若选择条件②:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $A=C$, 所以 $a=c$.

因为 $\cos B = -\frac{7}{9}$, 所以 $B \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

因为 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}c^2 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{2}$,

所以 $a = c = 3\sqrt{2}$.

由余弦定理, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 64$, 所以 $b = 8$.

(2) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\sin A = \frac{a}{b}\sin B = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{1}{3}$.

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B = \frac{1}{3} \times (-\frac{7}{9}) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = -\frac{23}{27}$.

18. (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$,

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (3x-2)(x-2)$.

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = 2$.

当 x 在区间 $[1, 3]$ 上变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

因为 $f(1) = 1$, $f(3) = 3$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值为 3, 最小值为 0.

(2) $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2 = (3x-a)(x-a)$,

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{a}{3}$ 或 $x = a$,

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > 0$ 时, $\frac{a}{3} < a$, 随着 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, \frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4a^3}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{a}{3})$, $(a, +\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{a}{3}, a)$.

当 $a < 0$ 时, $\frac{a}{3} > a$, 随着 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, \frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4a^3}{27}$	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$, $(\frac{a}{3},+\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,\frac{a}{3})$.

19. (1) 因为 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

(2) 因为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$, 所以 $f(x-\frac{\pi}{6})=2\sin x$.

因为 $g(x)=f(x)f(x-\frac{\pi}{6})$,

所以 $g(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin x=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)\sin x$

$=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\cos x\sin x=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}$.

因为 $0\leqslant x\leqslant m$, 所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2m-\frac{\pi}{3}$.

因为 $g(x)$ 的取值范围为 $[0,2+\sqrt{3}]$,

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2m-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$. 解得 $\frac{5\pi}{12}\leqslant m\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$.

20. (1) 由 $f(x)=e^x+a\sin x-1(a\in\mathbf{R})$, 得 $f'(x)=e^x+a\cos x$.

又 $f(0)=0$, $f'(0)=1+a$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$,

即 $y=(1+a)x$.

(2) 由题意知 $f'(0)=0$, 则 $a=-1$.

此时 $f(x)=e^x-\sin x-1$, 则 $f'(x)=e^x-\cos x$.

当 $x>0$ 时, $f'(x)=e^x-\cos x>1-\cos x\geqslant 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

设 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=e^x+\sin x$.

设 $\varphi(x)=g'(x)$, 则 $\varphi'(x)=e^x+\cos x$.

因为当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时, $\varphi'(x)>0$,

所以 $g'(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递增.

又 $g'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}+\sin(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$, $g'(0)=1>0$,

所以存在 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$, 使 $g'(x_0)=0$.

所以当 $x\in(x_0,0)$ 时, $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(x_0,0)$ 上单调递增.

即当 $x\in(x_0,0)$ 时, $g(x)<g(0)=0$, 即 $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0,0)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

所以 $a=-1$.

(3) ①若 $a\geqslant -1$, 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x>0$, 所以 $f(x)\geqslant e^x-\sin x-1$.

由 (2) 已证, $y=e^x-\sin x-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $e^x-\sin x-1>e^0-\sin 0-1=0$.

所以 $f(x)>0$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立.

此时不存在正实数 m, 使得对任意的 $x\in(0,m)$, 都有 $f(x)<0$,

所以 $a\geqslant -1$ 不合题意.

②若 $a<-1$, $f'(x)=e^x+a\cos x$, 设 $h(x)=f'(x)$, 则 $h'(x)=e^x-a\sin x$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x)=e^x-a\sin x>e^x+\sin x>0$,

所以 $f'(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

而 $f'(0)=1+a<0$, $f'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}>0$, 所以存在 $m\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $f'(m)=0$.

所以当 $x\in(0,m)$ 时, $f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上单调递减.

所以当 $x\in(0,m)$ 时, $f(x)<f(0)=0$.

所以 $a<-1$ 符合题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

21. (1) a_4 的所有可能值为 1, 3, 5.

(2) 因为 $\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}\geqslant\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}$, 所以 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$.

所以 $\min\{a_n,a_{n+1}\}\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$.

因为无穷数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值, 所以存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$ 使得 $a_n\leqslant a_{n_0}\ (n=1,2,\cdots)$.

因为 $a_{n_0}=\max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}-\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leqslant\max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leqslant a_{n_0}$,

所以 $\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}=0$.

故存在 $m\in\{n_0+1,n_0+2\}$ 使得 $a_m=0$.

所以 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(3) 不存在正实数 M, 使得对任意的正整数 n, 都有 $a_n\leqslant M$. 理由如下.

因为 $a_n>0\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 所以 $a_n\neq a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$.

设集合 $S=\{n\mid a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}$.

①若 $S=\{n\mid a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}=\varnothing$, 则 $a_1\leqslant a_2$, $a_i<a_{i+1}\ (i=2,3,\cdots)$.

对任意 $M>0$, 取 $n_1=[\frac{M}{a_1}]+2$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数),

则当 $n > n_1$ 时,

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + a_2$

$= a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + a_2 \geqslant (n-1)a_1 > M$.

②若 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geqslant 1\} \neq \varnothing$, 且 S 为有限集,

设 $m = \max\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geqslant 1\}$, 则 $a_{m+i} < a_{m+i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

对任意 $M > 0$, 取 $n_2 = [\dfrac{M}{a_{m+1}}] + m + 1$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数),

则当 $n > n_2$ 时,

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{m+2} - a_{m+1}) + a_{m+1}$

$= a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_m + a_{m+1} > (n-m)a_{m+1} > M$.

③若 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geqslant 1\} \neq \varnothing$, 且 S 为无限集,

设 $p_1 = \min\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geqslant 1\}$, $p_{i+1} = \min\{n \mid a_n > a_{n+1}, n > p_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

若 $p_{i+1} - p_i = 1$, 则 $a_{p_i} > a_{p_i+1} > a_{p_i+2}$, 又 $a_{p_i} < \max\{a_{p_i+1}, a_{p_i+2}\}$, 矛盾.

所以 $p_{i+1} - p_i \geqslant 2$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

记 $m_i = a_{p_i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

当 $p_{i+1} - p_i = 2$ 时, $a_{p_i} > a_{p_i+1}$, $a_{p_i+1} < a_{p_i+2}$, $a_{p_i+2} > a_{p_i+3}$.

因为 $a_{p_i+1} = a_{p_i+2} - a_{p_i+3}$, 所以 $m_{i+1} = a_{p_{i+1}+1} = a_{p_i+2} - a_{p_i+1} = a_{p_i} > a_{p_i+1} = m_i$.

当 $p_{i+1} - p_i \geqslant 3$ 时, $a_{p_i} > a_{p_i+1}$, $a_{p_i+1} < a_{p_i+2} < \cdots < a_{p_{i+1}}$, $a_{p_{i+1}} > a_{p_{i+1}+1}$.

因为 $a_{p_{i+1}-1} = a_{p_{i+1}} - a_{p_{i+1}+1}$, 所以 $m_{i+1} = a_{p_{i+1}+1} = a_{p_{i+1}} - a_{p_{i+1}-1} = a_{p_{i+1}-2} \geqslant a_{p_i+1} = m_i$.

所以 $m_i \leqslant m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

因为 $a_{p_{i+1}} = a_{p_{i+1}+2} - a_{p_{i+1}+1}$,

所以 $a_{p_{i+1}+2} = a_{p_{i+1}} + a_{p_{i+1}+1} = a_{p_{i+1}} + m_{i+1} \geqslant a_{p_{i+1}} + m_1 \geqslant a_{p_i+2} + m_1$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

所以 $a_{p_{i+1}+2} - a_{p_i+2} \geqslant m_1$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 且 $a_{p_1+2} > a_{p_1+1} = m_1$.

对任意 $M > 0$,

取 $n_3 = [\dfrac{M}{m_1}] + 1$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则当 $k > n_3$ 时,

$a_{p_k+2} = (a_{p_k+2} - a_{p_{k-1}+2}) + (a_{p_{k-1}+2} - a_{p_{k-2}+2}) + \cdots + (a_{p_2+2} - a_{p_1+2}) + a_{p_1+2}$

$\geqslant (k-1)m_1 + a_{p_1+2} > km_1 > M$.

综上, 不存在正实数 M, 使得对任意的正整数 n, 都有 $a_n \leqslant M$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。